

4D Kepler's Obsession

石井源久

1 Kepler's Obsession

Zometool には、" Kepler's Obsession " というセットがある。

(<http://www.zometool.com/products-kepob.html>)

これは、正 12 面体の中に立方体、その中に正 4 面体、正 8 面体、正 20 面体、と順に内接するように構成されているものである。そして、各正多面体ごとに色分けされており、通常の strut とは異なる色になっている。

これは、水星～土星までの軌道半径を、正多面体を用いて示そうとした、ケプラーの太陽系モデルに由来するものである。本来のケプラーの太陽系モデルは、土星軌道を含む球面に立方体が内接し、その立方体に木星軌道を含む球面が内接する。以下、同様に、正 4 面体、球面、正 12 面体、球面、正 20 面体、球面、正 8 面体、球面、と内接する。各球面の位置には、順に、火星軌道、地球軌道、金星軌道、水星軌道が相当する。

Zometool の "Kepler's Obsession" は、球面を経由していない点、および、多面体の順番において、本来のものとは異なるが、それでも、ケプラーの太陽系モデルを連想させるには十分なものである。

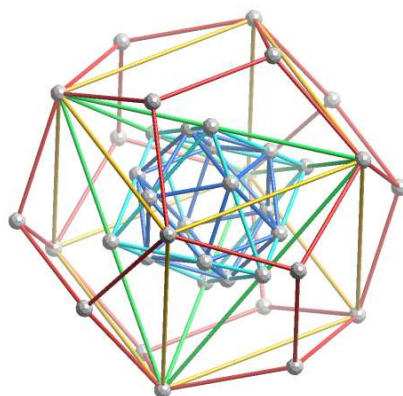


図 1: Kepler's Obsession の構成 (参照 : <http://www.zometool.com>)

2 正多胞体の投影図形を入れ子にする

Zometool では、4 次元の正多胞体を、3 次元に投影した図形も、適切な配置であれば全て作成することができる。そこで、3 次元の場合と同様に、4 次元の正多胞体が順に内接していくような模型を作成したいと考えた。

方針としては、外側ほど、胞数が多い正多胞体とした。すなわち、外から、正 600 胞体、正 120 胞体、正 24 胞体、正 16 胞体、正 8 胞体、正 5 胞体、の順番になっている。内接関係は、4 次元空間で正しく内接しているべきであるが、それにこだわると、作品全体が巨大になりすぎて、作成が困難になることが懸念される。そのため、今回は、3 次元に投影した状態での内接関係を考えるものとした。

2.1 正 600 胞体の中の正 120 胞体

正 600 胞体は点心、正 120 胞体は胞心の投影図形を作成することができる。大きさをうまく調整すると、正 600 胞体の投影図形に正 120 胞体の投影図形を内接させられる。

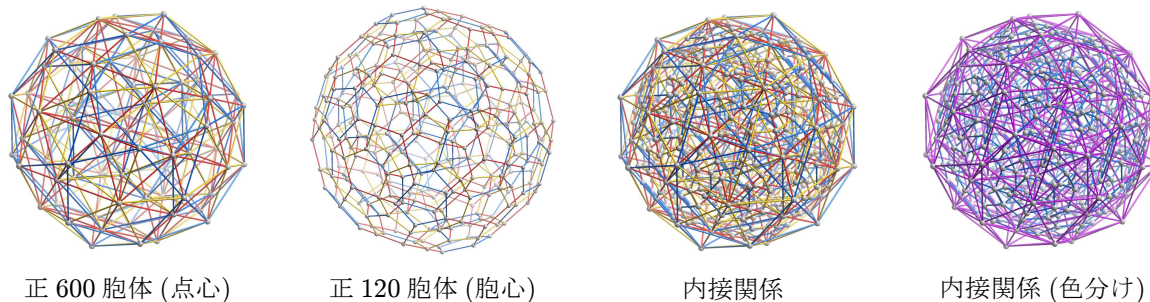


図 2: 正 600 胞体の中の正 120 胞体

2.2 正 120 胞体の中の正 24 胞体

正 24 胞体は、胞心および点心での投影図形を作成することができるが、今回は胞心のものを採用した。

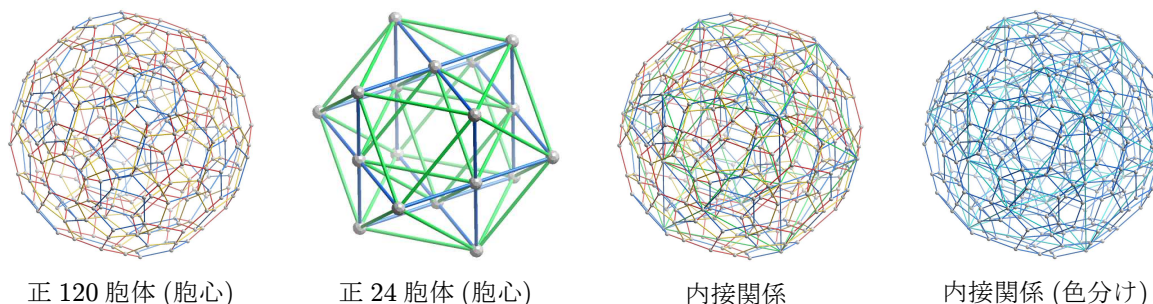


図 3: 正 120 胞体の中の正 24 胞体

2.3 正 24 胞体の中の正 16 胞体

正 16 胞体も、胞心および点心での投影図形を作成することができるが、今回は点心のものを採用した。

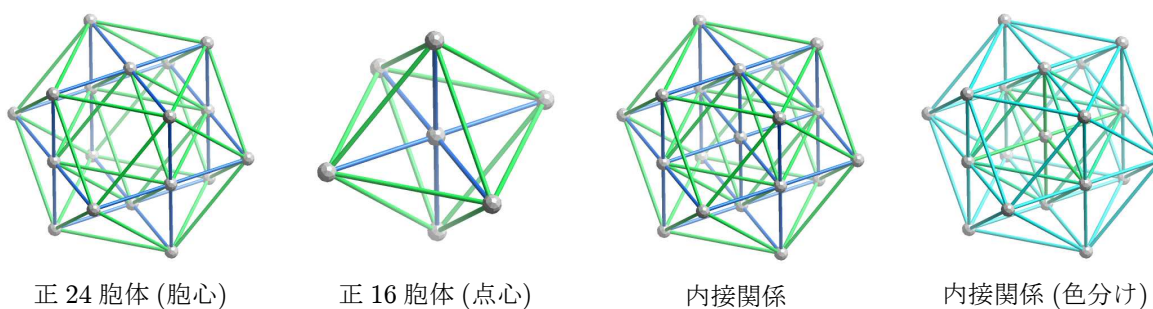


図 4: 正 24 胞体の中の正 16 胞体

2.4 正 16 胞体の中の正 8 胞体

正 8 胞体は、胞心・面心・線心・点心、を全て zometool で作成できる。今回は、正 16 胞体との双対関係により、胞心のものを採用した。この場合、立方体になる。

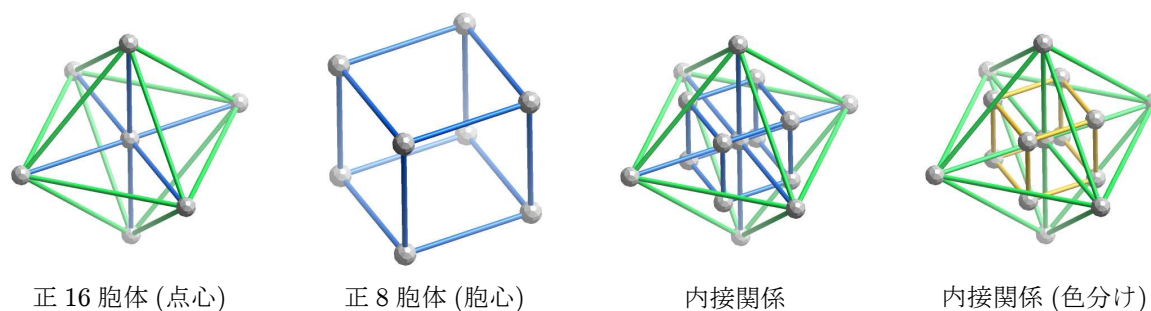


図 5: 正 16 胞体の中の正 8 胞体

なお、この立方体は、構造上の都合により、3次元での精確な内接位置よりも、少し内側に来ている。これは、その位置に、正 120 胞体の中心部分の正 12 面体があり、その頂点を活用することとしたためである。

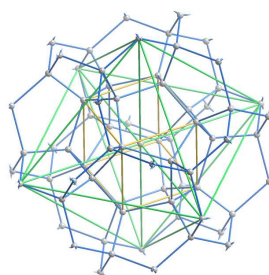


図 6: 正 8 胞体の位置

2.5 正 8 胞体の中の正 5 胞体

正 5 胞体は、胞心の投影図形と点心の投影図形が一致し、これを作成できる。なお、正 5 胞体の頂点 5 つのうち、最大で 4 つまでを正 8 胞体の頂点に一致させることができる。そのため、4次元的に見ると、1つだけ頂点が離れた位置に来るが、3次元で見た場合は、それがちょうど中央に来て、美しい配置となっている。

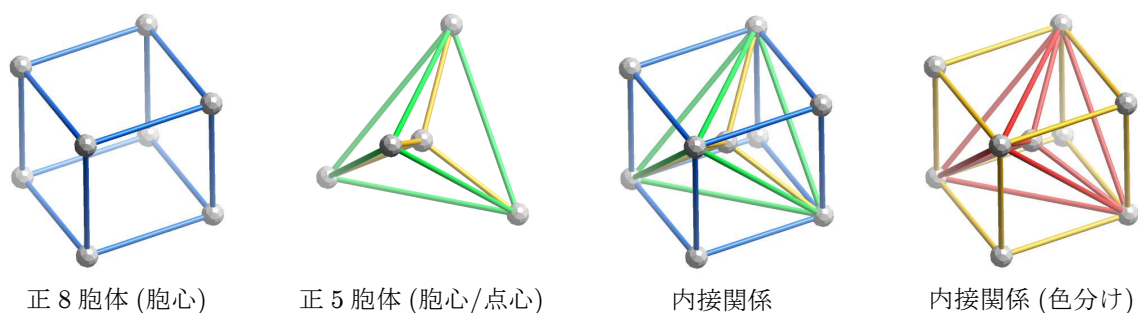


図 7: 正 8 胞体の中の正 5 胞体

3 4D Kepler's Obsession (CG)

以上を元に、全体像を CG で作成した。

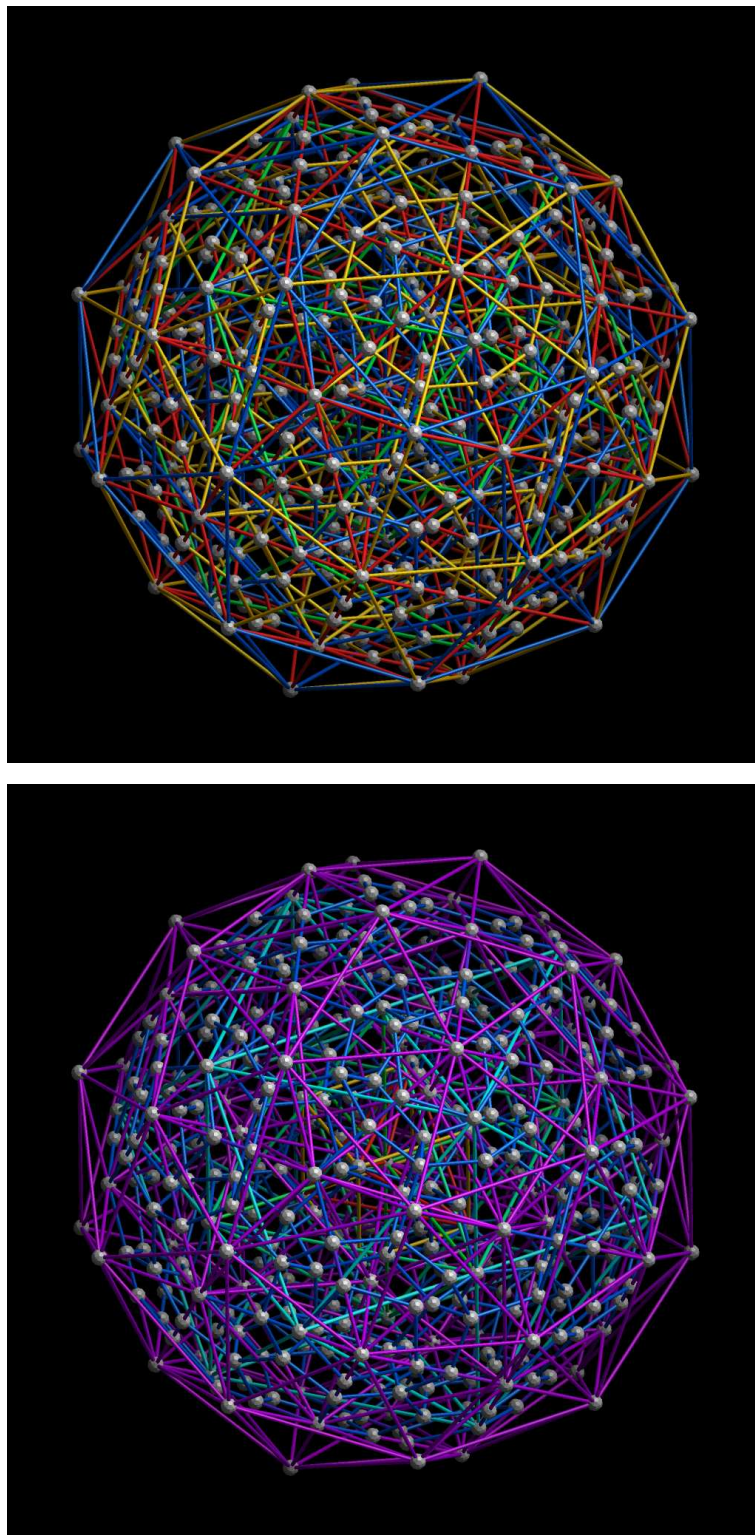


図 8: CG (上は本来の配色、下は正多胞体ごとに色分け)

4 4D Kepler's Obsession の作成

4.1 部分

実際に zometool を用いて、部分的に作成を行った。

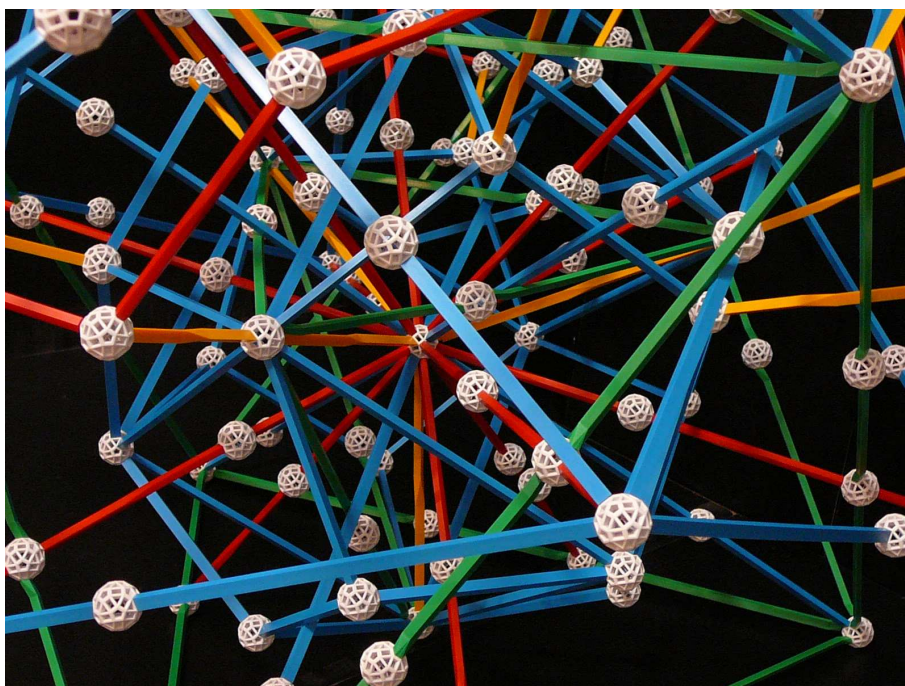
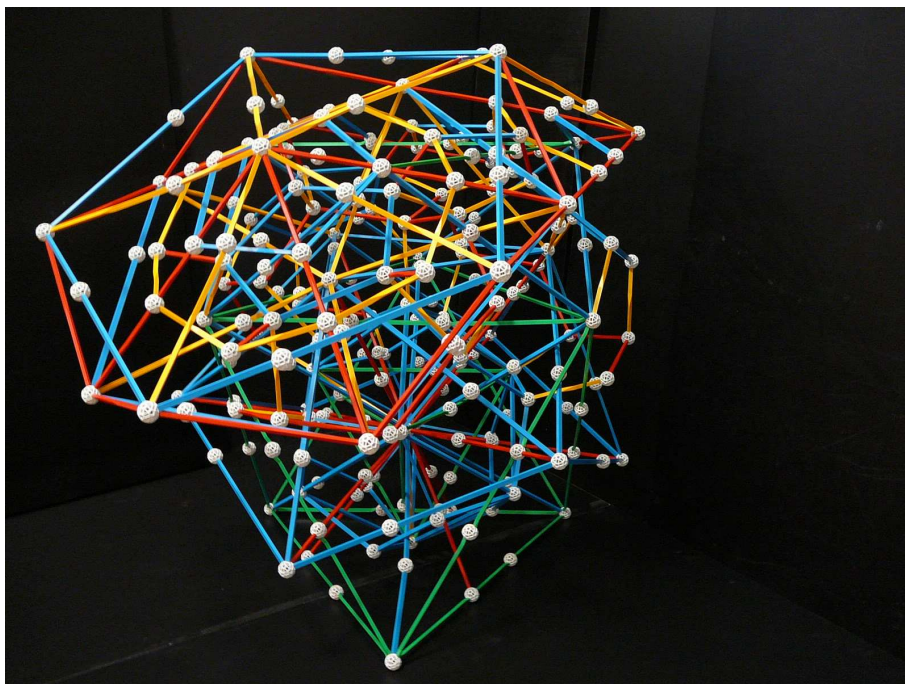


図 9: 上 : 部分的に作成したもの、下 : 中心部分の拡大

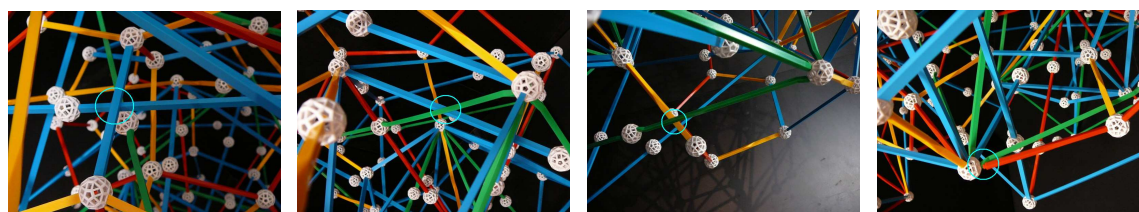
4.2 問題点

作成に当たって、以下の問題点があった。

1 サイズ長い strut が必要 正 600 胞体や、正 24 胞体の稜線において、最長のものよりもさらに長い strut が必要になる。これは、strut を継ぎ足すことで解決できた。

strut の交差 いくつかの strut が交差する場合があった。このうち、blue 同士、および、blue と green については、” half ” のサイズのものを用いることで回避できそうであるが、今回は手元に” half ” のものがなかったため、交差したままにしている。yellow と green の交差については、回避できそうになく、今回も交差したままとした。サイズアップして作成すれば解決できるかもしれないが、大きくなり過ぎて現実的でない。交差部分に負荷がかからないようにするには、strut を削って接着する等の工夫が必要になる。

差し込み位置の衝突 Zometool では、red と green の strut は、共に node の 5 角形の孔を使用するが、1 つの孔を red と green で同時に使用する場合が生じた。こうなった場合、今回は red の方をはめ込むことを諦めて作成を行った。完全に作成するには、red と green の strut を接着する等の工夫が必要になる。



blue 同士の交差

blue と green の交差

yellow と green の交差

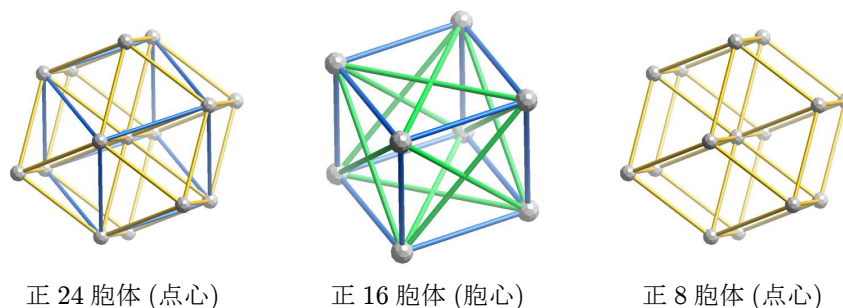
red と green の衝突

図 10: strut の交差 と差し込み位置の衝突

5 まとめ

多少の問題があるものの、ほぼ目的どおり、全ての正多胞体の 3 次元投影図形を含むモデルを作成することができた。

正多胞体を入れ子にする順番や、各正多胞体の大きさを工夫すれば、多くのバリエーションが生まれるものと思われる。また、今回採用していない配置(下図)を採用することも考えられる。今回のモデルでは、特に正 8 胞体の投影図が立方体なので少々面白みに欠けるとも思われるが、次回は、他の配置を用いたものにも挑戦したい。



正 24 胞体 (点心)

正 16 胞体 (胞心)

正 8 胞体 (点心)

図 11: 今回採用しなかった配置