# 立方体から正多面体を切り出す

岩手県立釜石南高等学校理数科 2 年
**太　田　待　子　　田　中　雅　子**

## はじめに

　ある日、課題研究の題材について私達が悩んでいると、お煮しめを食べている泉先生を見つけました。

　いつも美味しそうに食事をとる泉先生が、今日はお煮しめをじっくり見つめています。
何かおかしいなと思い、近付いてみてみると …、 大根の形が、人参の形が、なんと正多面体だったのです !!　規則正しく正多角形に切り取られていました。

　聞くところによると、それは宮本先生お手製のお煮しめだというのです。泉先生と一緒にお煮しめを堪能した後、早速宮本先生のところへ行きました。

　　　「あの大根、どうやって切ったんですか (　’△　’)!?」
　　　「これはな、向かい合ってる面が平行で、
　　　　ここの頂点がこの辺につながるように切っていくと … 」

　なんだか長い説明が続いたのですが、日常生活ではもちろん、数学の授業でもめったに触れる事の無い正五角形が 12 個もくっついている立体の説明を、大根でされたって分かる訳が無いのです。

　お煮しめだけでは足りない泉先生をよそに、私達の研究が始まりました。

## 1. テーマの設定

　書籍等で紹介されている、正多面体の作成方法には、展開図によるものや、折り紙でユニットを作り組み立てる方法であって、それ以外の方法は紹介されていません。教材用として市販されている正多面体模型もよく見ると薄い板がはめ込まれていて、展開図による製作法に類似したものだと思われます。

　一方で、水晶を正 20 面体にカッティングして売られているものもあり、塊から切断して正多面体を作る方法は、紹介されていないだけで、確かに存在すると考えられます。

　そこで、

　　　発砲スチロールの立方体を切断して正多面体を作る方法を見つけ、実際に作ってみる

をテーマにすることとしました。

# 2. 正多面体の種類

## 2.1 正多面体とは

正多面体とは、すべての面が合同な正多角形となっている多面体のことをいいます。たとえば、立方体は、一辺が同じ長さの正方形 6 つで囲まれた多面体になります。

## 2.2 正多面体の面の形

正多面体のひとつの頂点を考えたときに、それは少なくとも 3 面以上の面が集まっています。面が 2 つしかないと頂点にはなりません。

ひとつの面が正六角形の場合を考えてみましょう。正六角形のひとつの内角は $120°$ です。同じ大きさの正六角形 3 つを、それぞれの頂点をひとつの点に集めて配置したときに、3 つで 360 度になってしまって平坦になってしまい、多面体のとんがりをつくることができません。

このことから、正多面体のひとつの面の形は、正三角形・正四角形（正方形）・正五角形の 3 種類しかないことがわかります。

## 2.3 面の数の決定

さて、中学校の時に立体を調べたことがあります。多面体の面の数 $F$ と辺の数 $E$ と頂点の数 $V$ の間には、次の関係があることがわかりました。

$$F - E + V = 2$$

これは「オイラーの定理」とよばれています。

この定理を使って正多面体の種類を調べてみましょう。

正五角形の面の数を $x$ としましょう。正五角形 $x$ 個で囲まれる正多面体の辺の数 $E$ を考えると、隣ある 2 面がひとつの辺を共有しているので、

$$E = 5x \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x$$

となります。また、この正多面体の各頂点には集まる面の数は、4 つになると一つの頂点の周りの角度の合計が 360 度を超えてしまうので、3 つになるしかありません。したがって、頂点の数 $V$ は

$$V = 5x \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}x$$

となります。$F = x,\ E = \frac{5}{2}x,\ V = \frac{5}{3}x$ ですので、オイラーの定理によれば、

$$x - \frac{5}{2}x + \frac{5}{3}x = 2$$

となります。これから $x = 12$ となることがわかります。面の形が正五角形の正多面体は、面の数が 12、辺の数が 30、頂点の数が 20 となることになります。これは、正 12 面体です。

次に正方形を面とする正多面体について考えましょう。正方形の面の数を $x$ としましょう。正方形 $x$ 個で囲まれる正多面体の辺の数 $E$ を考えると、上と同様にして、

$$E = 4x \times \frac{1}{2} = 2x$$

となります。また、この場合も、一つの頂点に集まる面の数は 3 であり、頂点の数 $V$ は

$$V = 4x \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}x$$

となります。$F = x,\ E = 2x,\ V = \frac{4}{3}x$ ですので、オイラーの定理によれば、

$$x - 2x + \frac{4}{3}x = 2$$

となります。これから $x = 6$ となることがわかります。面の形が正方形の正多面体は、面の数が 6、辺の数が 12、頂点の数が 8 となることになります。これは、立方体（正六面体）です。

最後に正三角形を面とする正多面体について考えましょう。一つの頂点に集まる面の数は 3・4・5 の 3 つの場合が考えられるので、それぞれについてひとつひとつ、同じように考えてみましょう。

一つの頂点に正三角形が 3 つ集まる多面体では、

$$F = x$$
$$E = 3x \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$$
$$V = 3x \times \frac{1}{3} = x$$

となるので、オイラーの定理より、

$$x - \frac{3}{2}x + x = 2$$

となり、これから、$x = 4$ となります。面の数は 4、辺の数が 6、頂点の数が 4 で、これは正四面体です。

一つの頂点に正三角形が 4 つ集まる多面体では、

$$F = x$$
$$E = 3x \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$$
$$V = 3x \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x$$

となるので、オイラーの定理より、

$$x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x = 2$$

となり、これから、$x = 8$ となります。面の数は 8、辺の数が 12、頂点の数が 6 で、これは正八面体です。

一つの頂点に正三角形が 5 つ集まる多面体では、

$$F = x$$
$$E = 3x \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$$
$$V = 3x \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}x$$

となるので、オイラーの定理より、

$$x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}x = 2$$

となり、これから、$x = 20$ となります。面の数は 20、辺の数が 30、頂点の数が 12 で、これは正 20 面体です。

以上のように、正多面体は、正四面体、正六面体（立方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体の 5 つしか存在しないことがわかりました。

## 3. 目標の設定

正多面体を作る材質としては、木材・金属・鉱物・粘土などいろいろ考えられますが、工作のしやすさから、発砲スチロールがよいと考えました。発砲スチロールの切断のためには「発砲スチロールカッター」が市販されています。これは電熱線に電流を流して熱によって発砲スチロールを融かして切断するものです。これを利用することを考えました。

正多面体は 5 種類しかないのですが、正六面体は製作（切断）することは容易です。発砲スチロールの塊があったとき、ひとつの平面で切断した後、その平面に垂直な平面で切断していけばよいのです。東急ハンズでは、工作用の素材として、発砲スチロールの立方体・直方体・球などが市販されています。

そこで、製作の出発点を立方体とすることにし、立方体以外のすべての正多面体を立方体から切断によって作ることを目標としました。

# 4. 準備したもの

## 4.1 発砲スチロール

東急ハンズで、一辺が 10cm の発砲スチロール製立方体が 1 個 110 円で売られていました。これを使うことにしました。

## 4.2 切断装置

HOMAC やサンデーでも発砲スチロールカッターが手に入りますが、電熱線の長さが数 cm から、大きくても 15cm ぐらいです。

一辺が 10cm の立方体を切るときには、$10\sqrt{3}$cm の長さが必要となります。そこで、電熱線の長さが 30cm ほどとなるような切断装置を自作することとしました。

図 4-1

図 4-2

図 4-3

図 4-4

基本的には 1 辺 30cm の立方体の骨組みをつくり、鉛直線方向に電熱線を張るようにしました。3cm

角の木材を Do It Yourasef 店で切ってもらい組み立てました。電熱線は、直径 0.2mm のニクロム線を用いて、天井に渡した梁と底面との間に鉛直線方向に張ります。電熱線に電流を流すと、熱で膨張して緩んでしまいます。そこで、電熱線を張り方を調整できるようにしました。底面はスライドするようにし、ここに材料を置いて底面ごと動かして切断します。

電熱線に流す電流は試行錯誤によって、1.2V の電圧をかけたときが工作しやすいことがわかりました。

## 4.3 材料固定台

切断のための電熱線が鉛直方向に固定されているため、切断する発砲スチロールの方を所定の角度に固定するための工夫が必要です。そのために、工作用紙を用いて固定台を作りました。図 4-5 のように発砲スチロールを固定して、固定台を乗せた底面全体をスライドさせます。

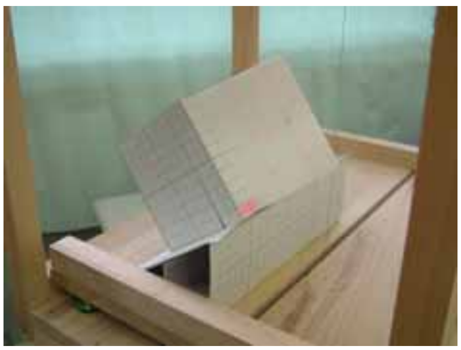


図 4-5

図 4-6

必要な切断面を得るために、空間において所定の角度が得られるような台を作る必要があります。この研究の主要な部分は、この固定台をどのように作らなければならないかを一つ一つ計算して求め、それを実際に作ることにありました。

以下、この固定台の設計をするために必要な計算を示します。固定台の設計は、2 人でそれぞれ別々に考えました。一つの多面体を切断するために、異なった固定台を作りました。

## 4.4 Zome Tool

図 4-7

正多面体がどのような立体であるかを観察するために、Zome Tool という、立体造形模型キットを用いて正多面体を組み立てました。この Zome Tool は、頂点と辺だけで組み立てるものなので、正多面体の内部の様子も目で見えるような模型を組み立てることができます。

## 5 正四面体

Zome Tool による正四面体は、図 5-1 のように立方体の中に入っていることがわかります。よって、図 5-2 の四面体 ABCD の部分を切り取ることになります。

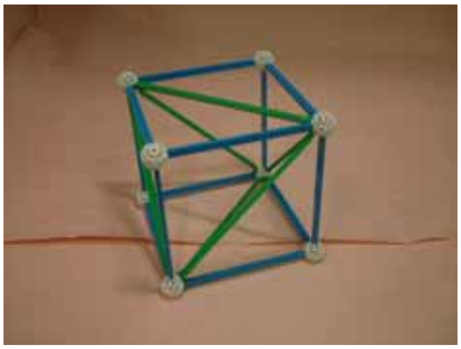


図 5-1

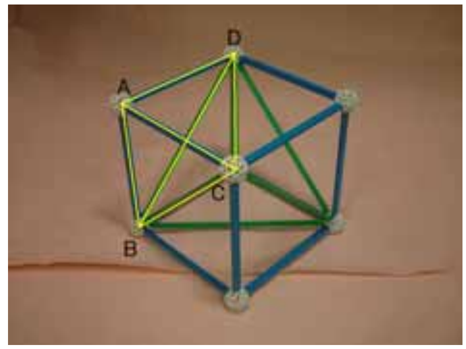



図 5-2

### 5.1 待子の場合

正四面体の図 5-3 の面を A 面とします。A 面を水平面に対して垂直にすると考えると、図 5-4 のような角度になります。

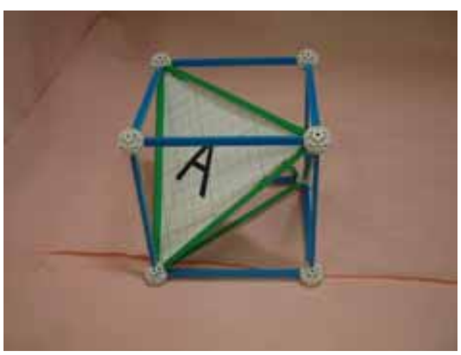



図 5-3

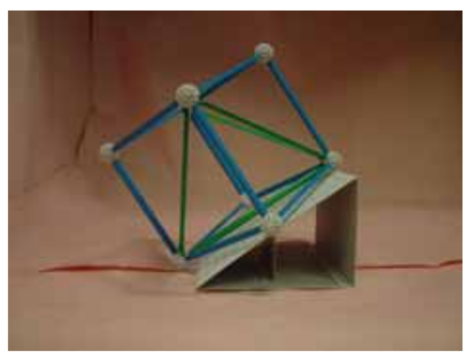


図 5-4

この傾きを出すために、A 面と水平面の角度を座標をおいてベクトルを用いて出すことにしました。

図5-5 のように座標を$\mathrm{S}(1,0,1)$,$\mathrm{H}(0,1,1)$,$\mathrm{Q}(1,1,0)$ とおきます。A 面と水平面の角度とは$\mathrm{S}(1,0,1)$ と $\mathrm{H}(0,1,1)$ の中点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ と原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を結んだ OP と OQ が成す角度 $\theta$ となります。

この $\theta$ を求めるために、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,1,0)$ とおいて、次のように計算します。

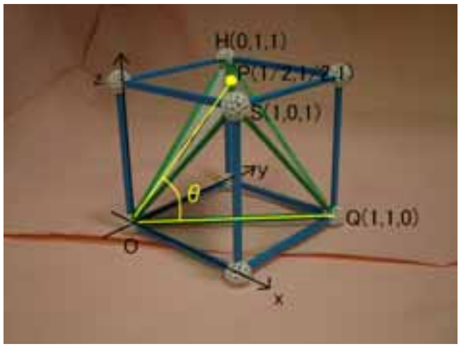
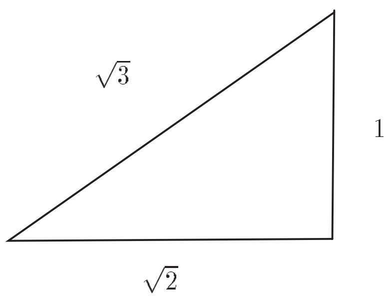



図 5-5

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+1\cdot 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\ \sqrt{1^2+1^2+0^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773502\ldots
\end{aligned}
$$

$$\theta \approx 55^\circ$$



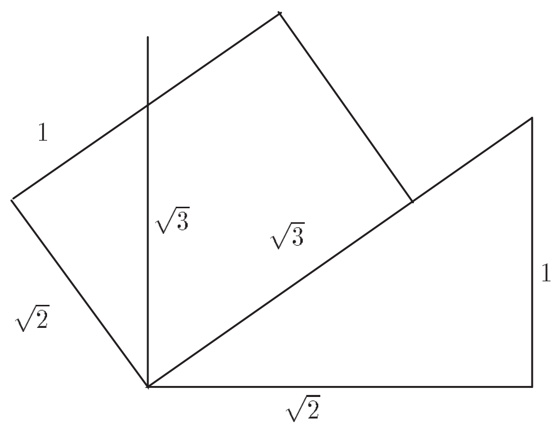




図 5-6

したがって、$90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ より $35^\circ$ 傾ければよいことがわかります。実際にこの角度を出すために図 5-6 の比の三角形を使いました。

また SH を電熱線の通る道と平行にしなければならないので、図 5-7 のように $45^\circ$ 傾けて置くようにします。これらをもとに固定台を作ります。これで完成 !! (図 5-8)

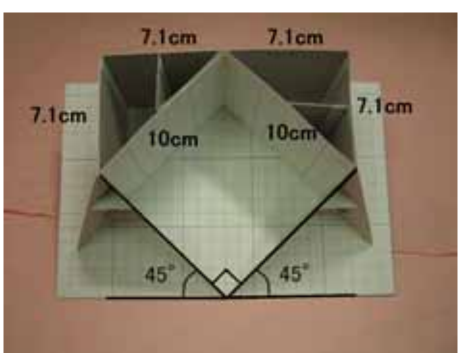



図 5-7

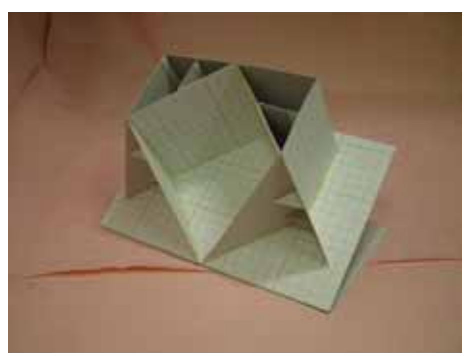


図 5-8

実際に切ってみます。


図 5-9


図 5-10


図 5-11


図 5-12


図 5-13

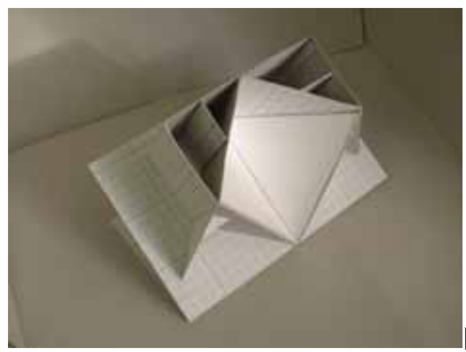


図 5-14

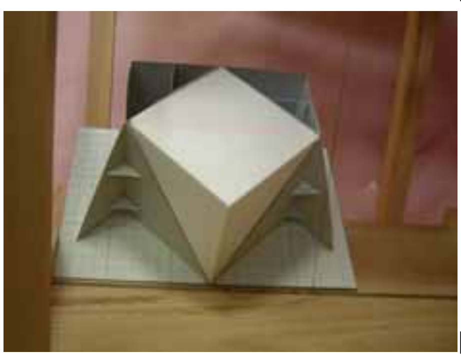


図 5-15


図 5-16

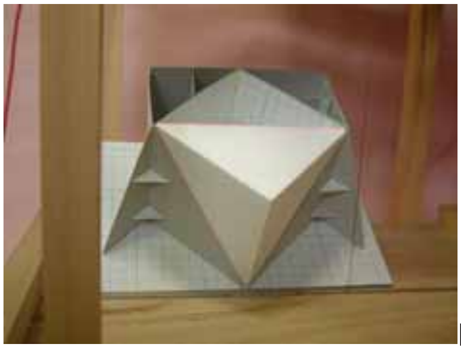


図 5-17

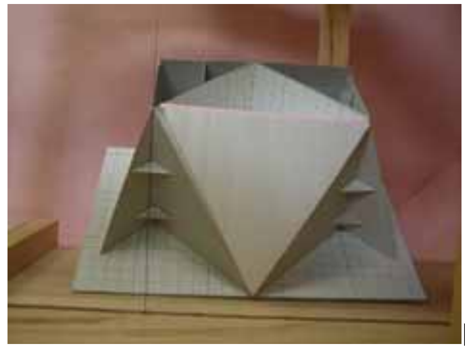


図 5-18


図 5-19

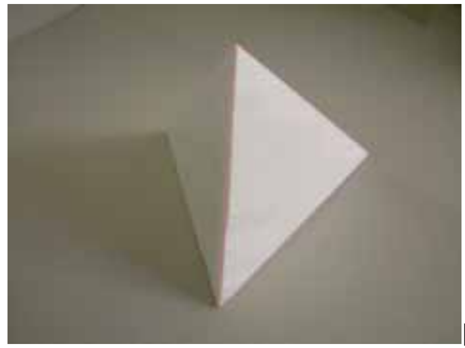


図 5-20

## 5.2 雅子の場合

図 5-21 のように一辺を 1 とする立方体 ABCD-EFGH を考えて、三角形 ACF で定まる面を P とします。

底面 EFGH の 1 辺 EF を回転軸として 45° 傾けて、辺 CF が水平面に垂直になるようにします。そして、電熱線が辺 CF を通って頂点 A にぬけるように固定することを考えます。

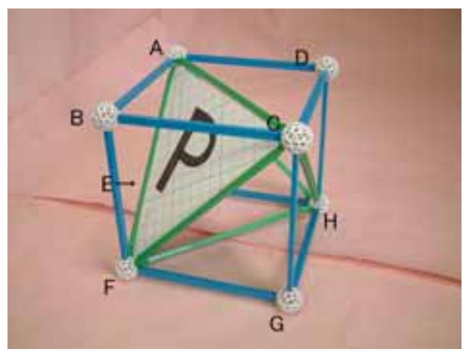


図 5-21

辺 EF を水平面につけたまま、辺 EF を中心に 45° 回転して、辺 CF が水平面に垂直になったとき、頂点 G,H からそれぞれ水平面に下ろした垂線の交点を I,J とします。この状態で立方体を固定するためには、三角柱 GFI-HEJ(△GFI と △HEJ は直角二等辺三角形) を作ればよいことになります。（図 5-22,23）

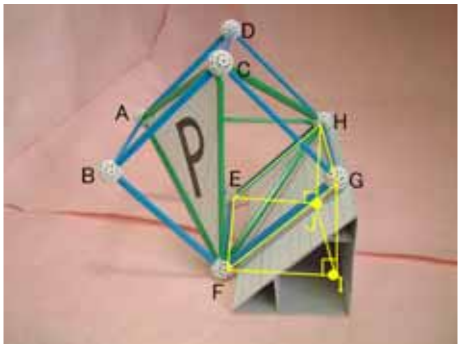



図 5-22

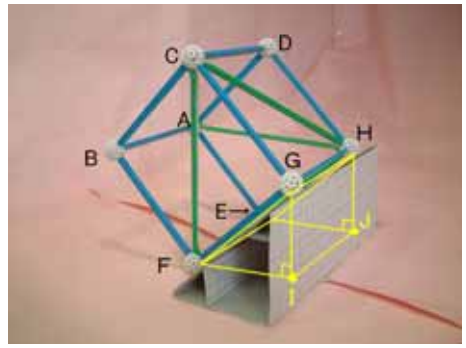



図 5-23

また、反対側の面 AEF を支える必要があります。A から水平面に下ろした垂線の交点を K とすると、三角錐 AKEF を作ることになります。(図 5-24)

そのために、△AEF、△AEK、△AKF、△EFK がどんな三角形になるかを調べます。

△AEK は △GFI と △HEJ と合同な斜辺が 1 の直角二等辺三角形になっています。また、△AEF は斜辺が $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形になっています。

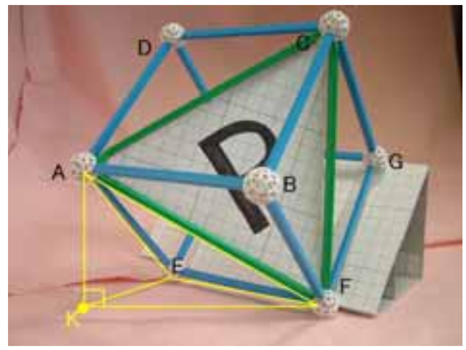



図 5-24

△AKF は $\mathrm{AF}=\sqrt{2}$、AK は △AEK の辺 AK と同じなので $\mathrm{AK}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となります。残りの KF は三平方の定理 $\mathrm{KF}^2+\mathrm{AK}^2=\mathrm{AF}^2$ を用いて、

$$\mathrm{KF}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\mathrm{KF}^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$\mathrm{KF}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

と出ます。直角三角形の 3 辺すべてがわかったので、余弦の値を求めて、∠AKF と ∠AFK は、

$$\cos\angle\mathrm{AKF}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

より

$$\angle\mathrm{AKF}=60^\circ \qquad \angle\mathrm{AFK}=30^\circ$$

となります。

次に △EFK については、上の式より $\mathrm{EF}=1$、$\mathrm{KF}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$、$\mathrm{KE}=\mathrm{AK}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とわかっています。また、$\mathrm{EF}^2+\mathrm{EK}^2=1^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3}{2}=\mathrm{FK}^2$ より、△EFK は $\angle\mathrm{FEK}=90^\circ$ の直角三角形だとわかります。したがって、∠EFK と ∠EKF を求めると、

$$\cos\angle\mathrm{EFK} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8164965\ldots \qquad \text{より} \quad \angle\mathrm{EFK} \approx 35^\circ$$

$$\cos\angle\mathrm{EKF} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773502\ldots \qquad \text{より} \quad \angle\mathrm{EKF} \approx 55^\circ$$

となります。△AKF について立方体の一辺を 1　から 10　にしたときのそれぞれの辺の長さを求め、電卓を使い近似値を出します。

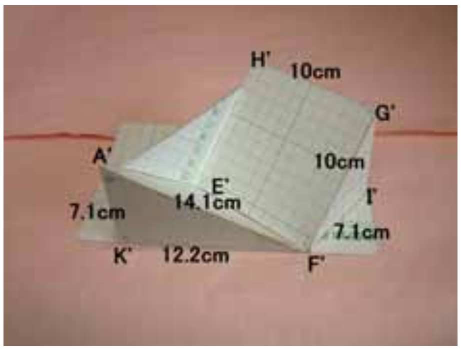



図 5-25

$$\mathrm{A'K'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 = 5\sqrt{2} \approx 7.0710678\ldots$$

$$\mathrm{A'K'} \approx 7.1\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{K'F'} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times 10 = 5\sqrt{6} \approx 12.2474487\ldots$$

$$\mathrm{K'F'} \approx 12.2\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{A'F'} = \sqrt{2} \times 10 = 10\sqrt{2} \approx 14.1421356\ldots$$

$$\mathrm{A'F'} \approx 14.1\mathrm{cm}$$

他の三角形についても同様にして近似値を出し、固定台を作ります。（図 5-25）

実際に切ってみます。

図 5-26

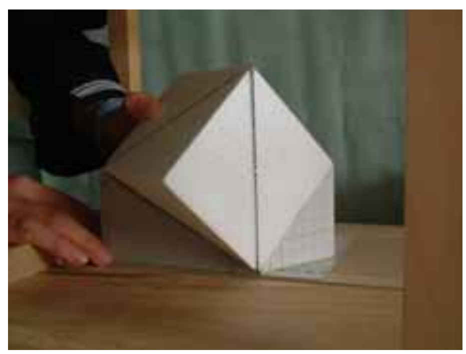


図 5-27

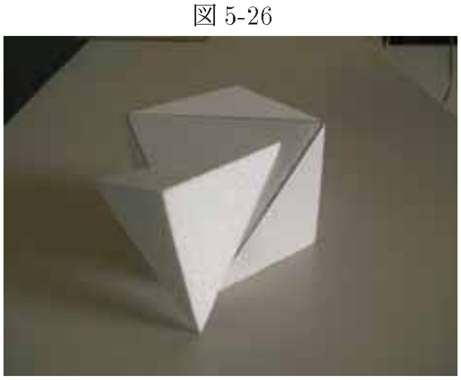


図 5-28

図 5-29

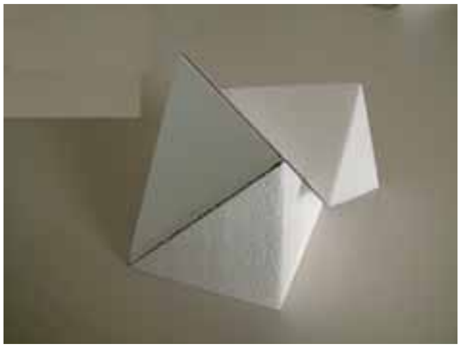


図 5-30

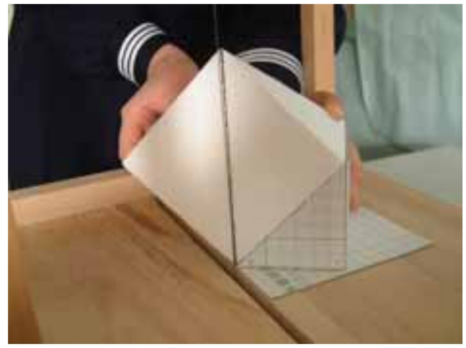


図 5-31

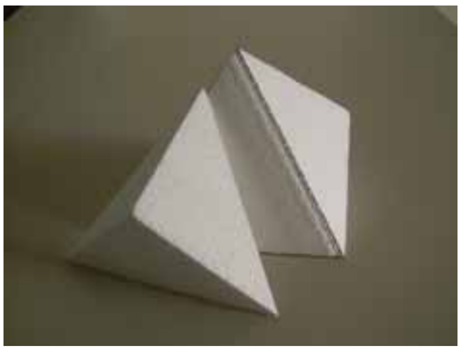


図 5-32

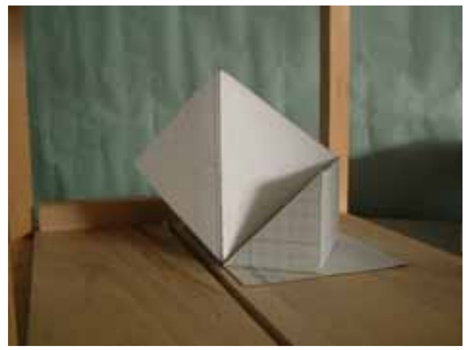


図 5-33

図 5-34

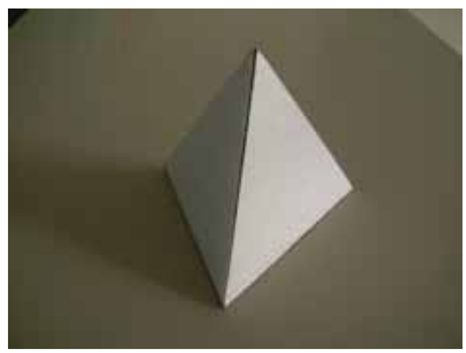


図 5-35

## 6 正八面体

まずはじめに Zome Tool を使って、正八面体を作り観察します。

図 6-4 のように、切断する面の角度は、正四面体のときと同じであることがわかります。

そのため、固定台は正四面体で用いたものを使うことができます。このとき、正四面体の場合は 1 つの面で 2 方向にカットしましたが、正八面体はさらにそれに直交した方向にも 2 回カットし、反対の面でも同じことを行うので、計 8 回のカットになります。

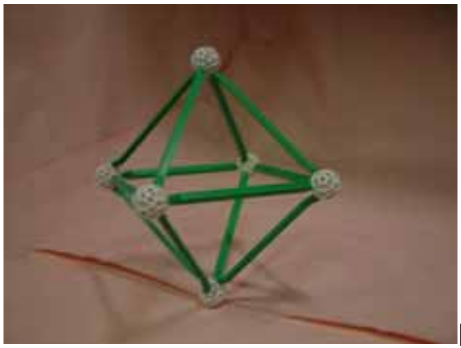


図 6-1

Zome Tool で作った正八面体です。

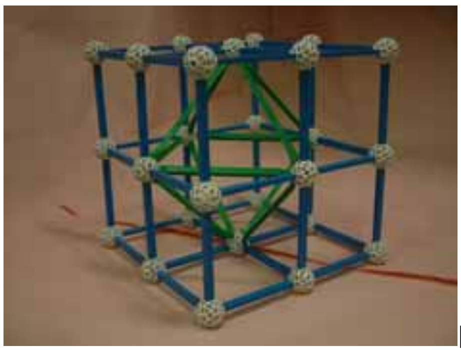


図 6-2

この正八面体は、このように立方体の中に埋め込まれます。

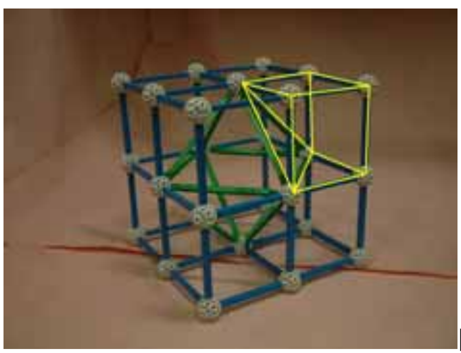


図 6-3

図 6-3 で示した部分を切り取ります。

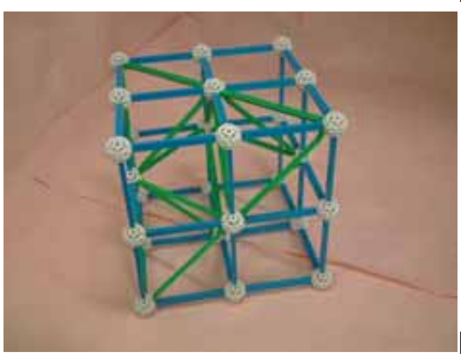


図 6-4

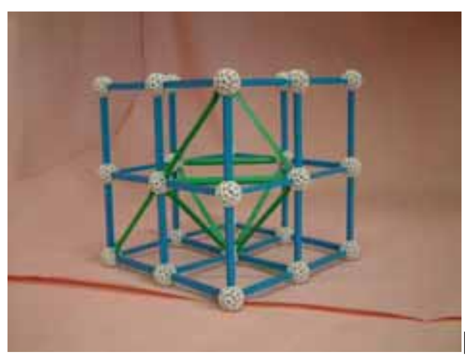


図 6-5

## 6.1 待子の場合

待子の方法による切断の手順を示します。

図 6-6

図 6-7

図 6-8

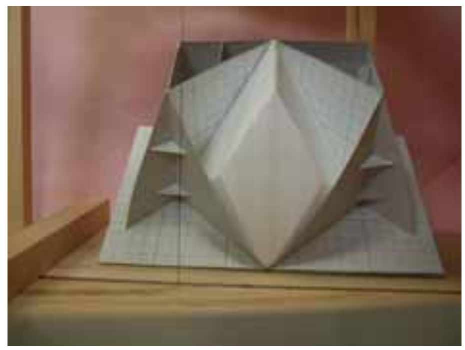


図 6-9

図 6-10

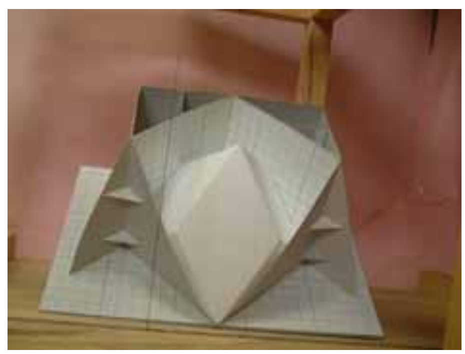


図 6-11

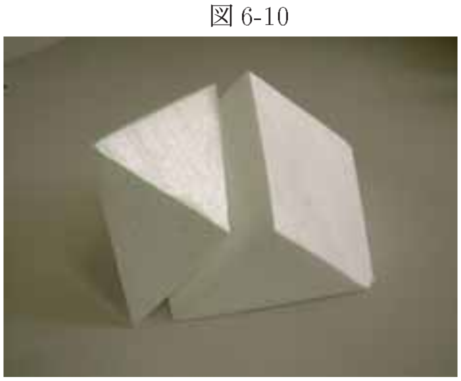


図 6-12

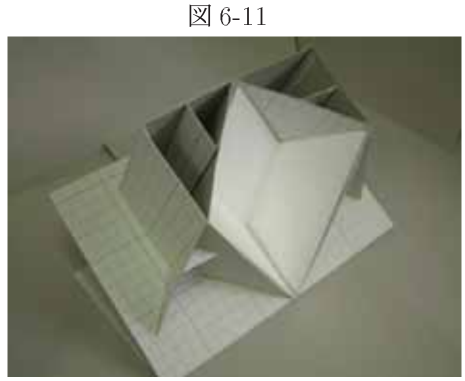


図 6-13

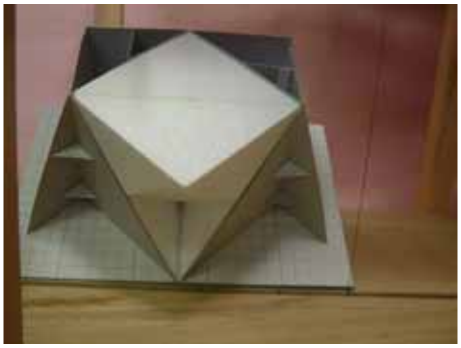


図 6-14

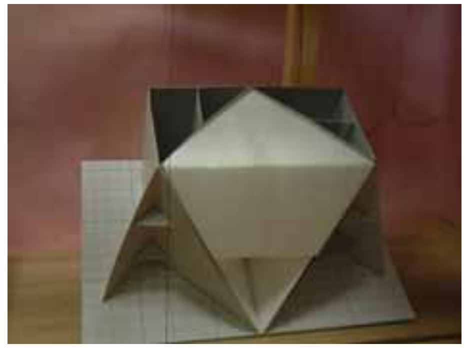


図 6-15

図 6-16

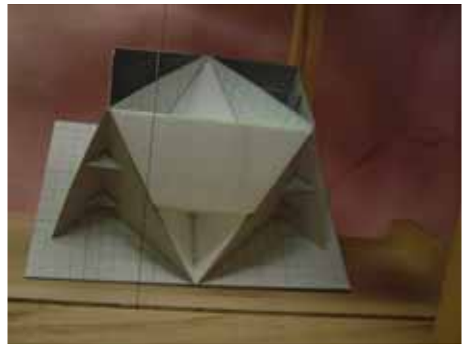


図 6-17

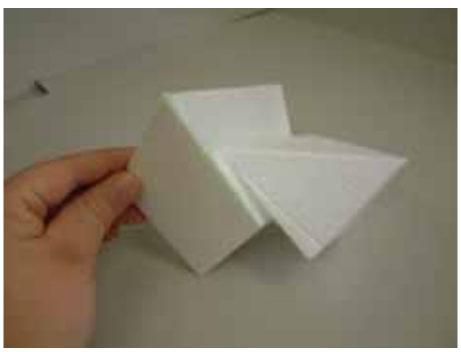


図 6-18

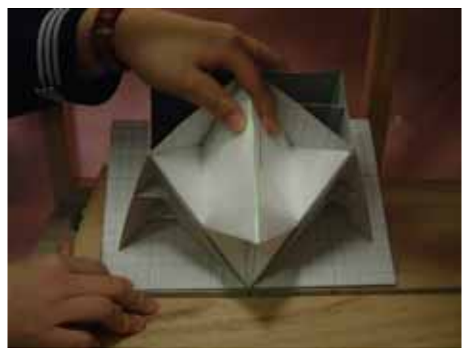


図 6-19

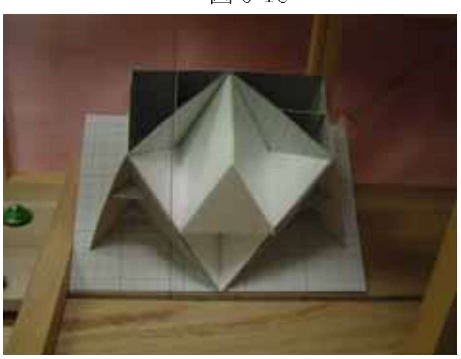


図 6-20

図 6-21

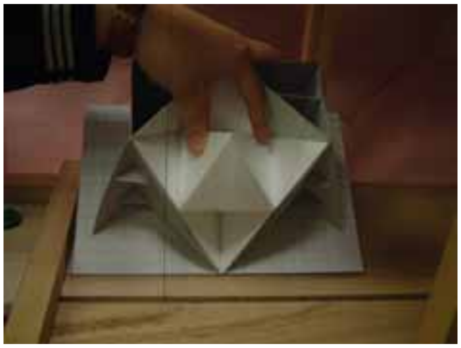


図 6-22

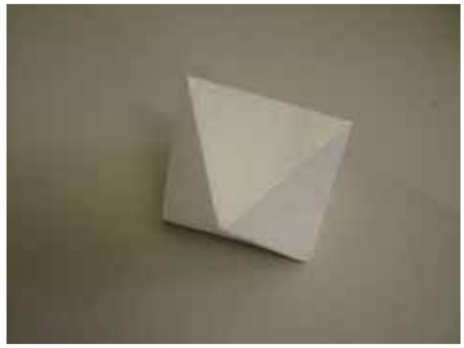


図 6-23

## 6.2 雅子の場合

雅子の方法による切断の手順を示します。

図 6-24

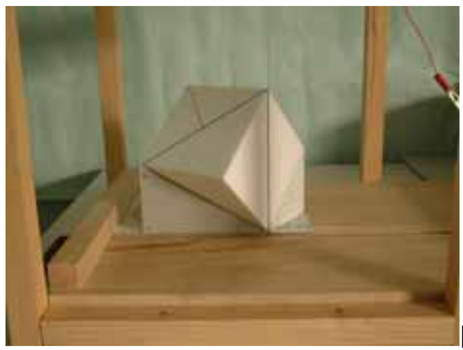


図 6-25

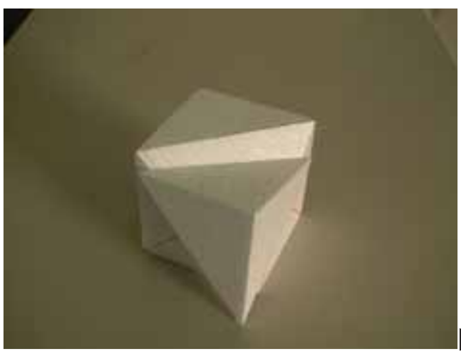


図 6-26

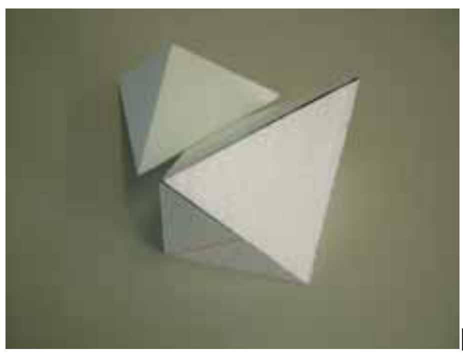


図 6-27

図 6-28

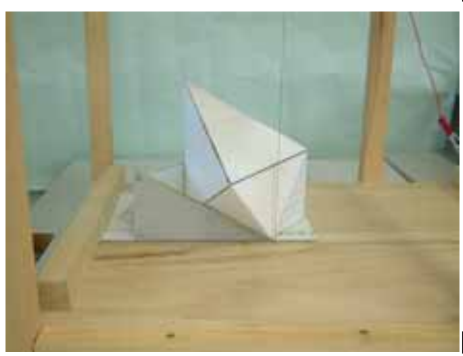


図 6-29

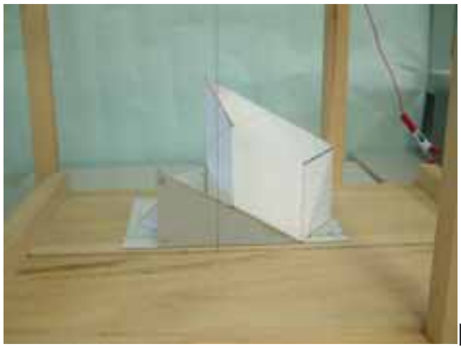


図 6-30

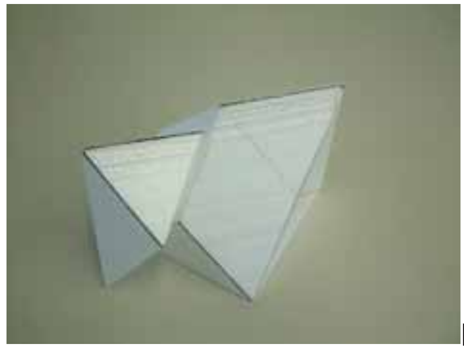


図 6-31

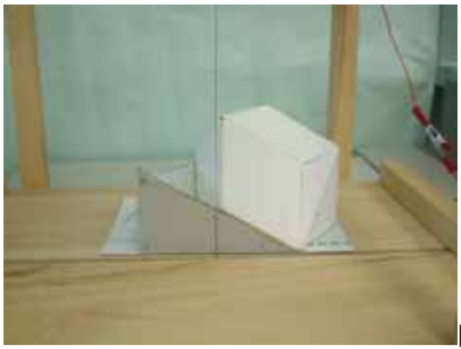


図 6-32

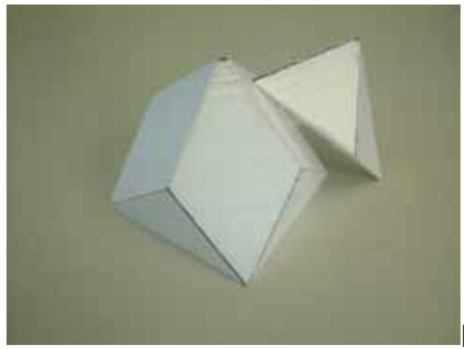


図 6-33

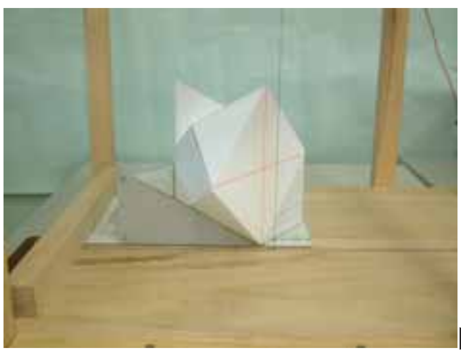


図 6-34

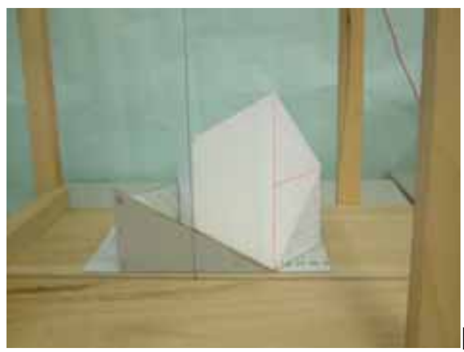


図 6-35


図 6-36

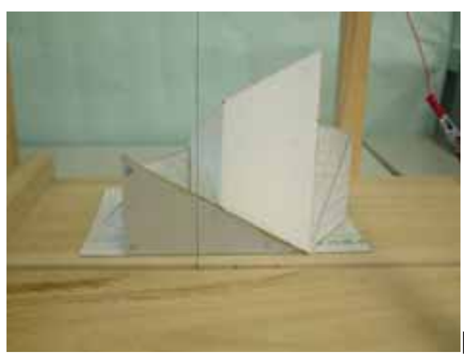


図 6-37

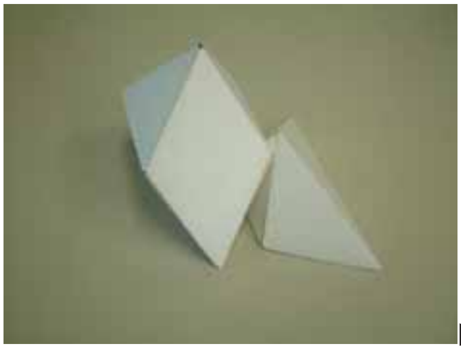


図 6-38

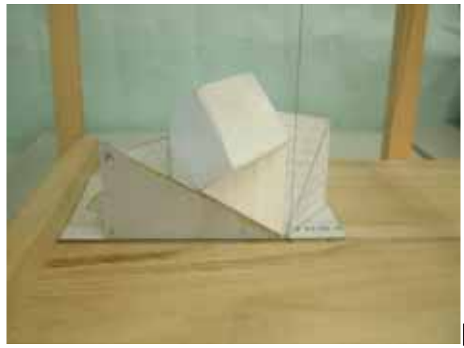


図 6-39

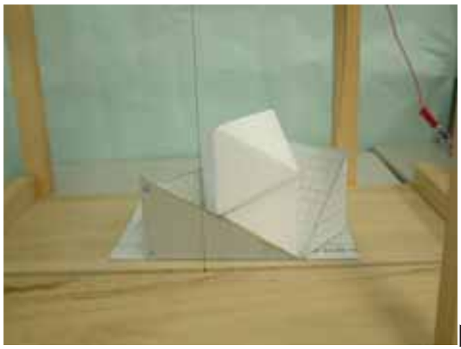


図 6-40

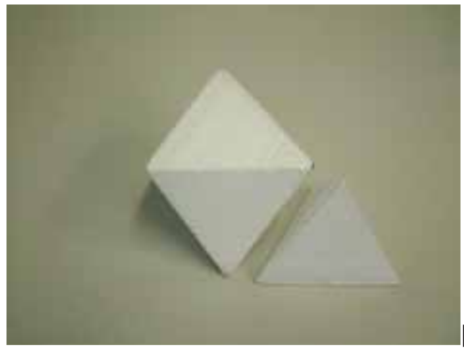


図 6-41

## 7 正十二面体

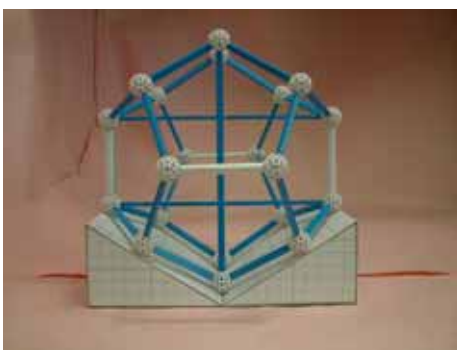


図 7-1

これは 2 人で同じように考えました。

図 7-1 のような台の上に置くと、元の立方体の部分が、6 本の辺として残っているようです。もちろんこの台は切り取る部分となります。そしてその切り取る部分があと 5ヶ所あります。台をなしている三角柱 12 個すべて同じ形で切ればいいようです。

台の三角柱の底辺と図 7-2 の上部に強調された三角形は合同なので、この三角形の各辺の長さを出します。それには図 7-3 の正五角形の対角線の長さを出さなければなりません。

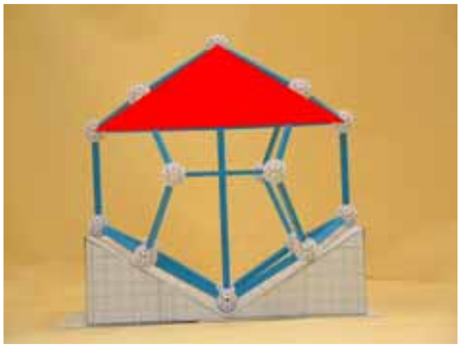


図 7-2

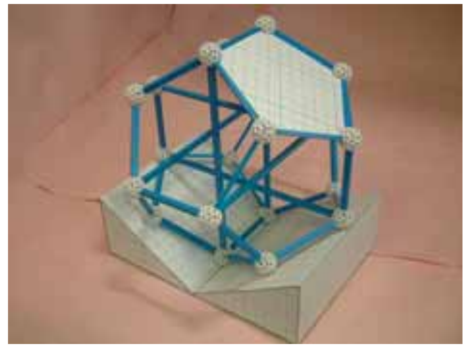


図 7-3

## 7.1 正五角形の対角線について

正五角形 ABCDE を考えます。$\angle \mathrm{ABC} = 108°, \angle \mathrm{ACD} = 72°$ であり、$\triangle \mathrm{ACD}$ は二等辺三角形です。

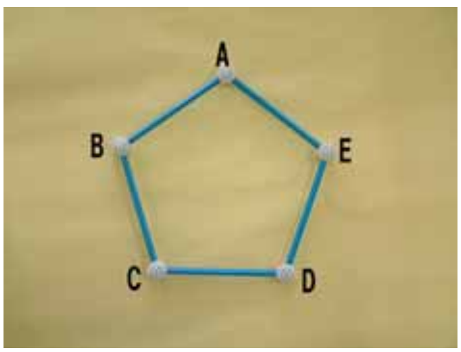



図 7-4

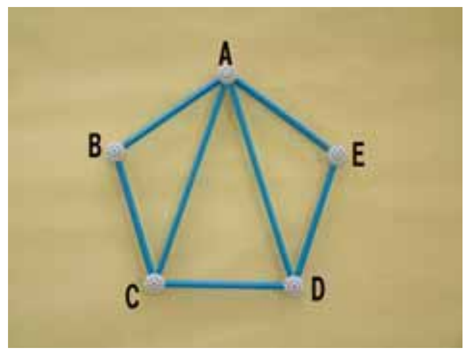



図 7-5

$\angle \mathrm{CDA}$ の二等分線と AC の交点を点 P とおくと $\angle \mathrm{CDP} = 36^\circ$ より $\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{DPC}$ となるので、

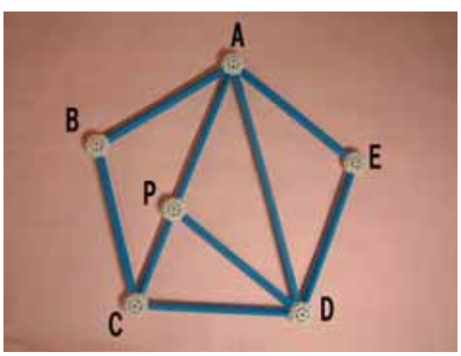



図 7-6

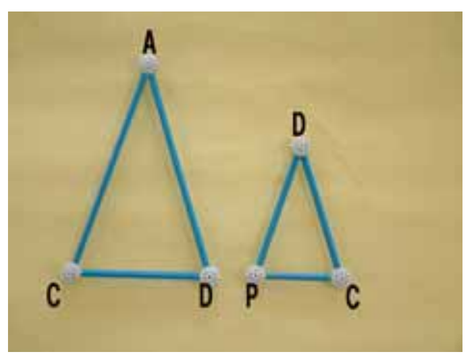



図 7-7

$\mathrm{AB} = 1, \mathrm{AC} = x$ とおくと　　　$\mathrm{AC} : \mathrm{CD} = \mathrm{DP} : \mathrm{PC}$

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

ゆえに　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x{>}0$ より $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

したがって、正五角形の一辺と対角線の比は、$1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となります。

以下、$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ として、この値を使います。

計算の途中で $\varphi^2$ を計算しなければならないときには、$\varphi$ がみたす方程式

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

を用いて、

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

として次数を下げて計算していきます。

## 7.2 切断角の計算

正五角形の一辺の長さを 1 とすると、$\mathrm{AB} = 1, \mathrm{AC} = \varphi$ であり、

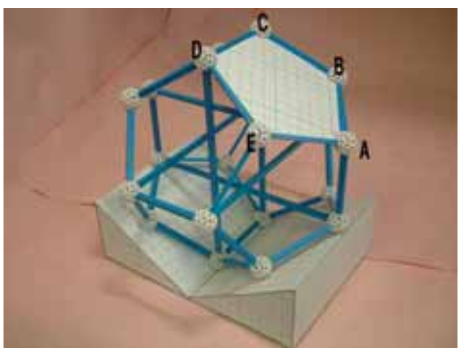



図 7-8

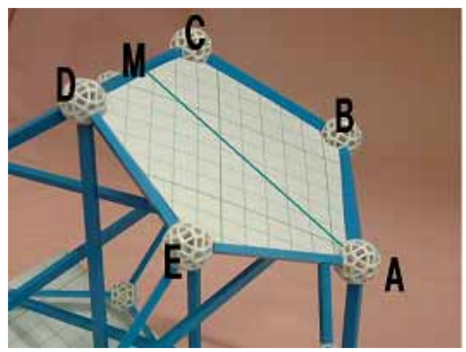



図 7-9

CD の中点を M とおくと、三平方の定理より

$$\mathrm{AM}^2 = \varphi^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

$\mathrm{AM} > 0$ より　$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{\sqrt{4\varphi+3}}{2}$

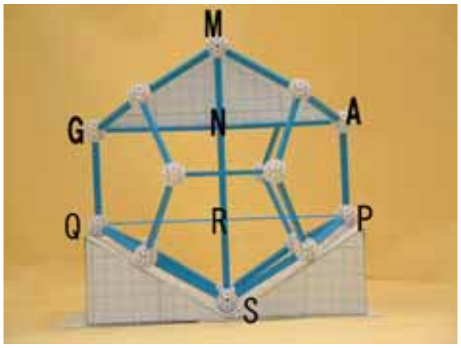



図 7-10

正十二面体に戻りましょう。新たに点 G をおきます。AG は立方体の一辺の長さになります。

AG の中点を N とおきます。

図で、$\mathrm{AG}=\mathrm{MS}=\mathrm{MN}+\mathrm{NR}+\mathrm{RS}$ となり、$\mathrm{NR}=\mathrm{AP}=1,\ \mathrm{RS}=\mathrm{MN}$ となるから

$$\mathrm{AG}=1+2\mathrm{MN} \qquad \cdots$$

また、ピタゴラスの定理より

$$\mathrm{MN}^2=\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2 \qquad \cdots$$

より $$\mathrm{MN}^2=\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}-\left(\frac{\mathrm{AG}}{2}\right)^2=\frac{-\mathrm{AG}^2+5+2\sqrt{5}}{4}$$

したがって、 $$\mathrm{MN}=\frac{\sqrt{-\mathrm{AG}^2+5+2\sqrt{5}}}{2} \qquad \cdots$$

より $$\mathrm{AG}=1+2\mathrm{MN}=1+\sqrt{-\mathrm{AG}^2+5+2\sqrt{5}}$$
$$\mathrm{AG}-1=\sqrt{-\mathrm{AG}^2+5+2\sqrt{5}}$$

両辺 2 乗すると

$$\mathrm{AG}^2-2\mathrm{AG}+1=-\mathrm{AG}^2+5+2\sqrt{5}$$
$$\mathrm{AG}^2-\mathrm{AG}-2-\sqrt{5}=0$$

これを解いて

$$\mathrm{AG}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\varphi+1$$

より $$\mathrm{MN}=\frac{\sqrt{-(\varphi+1)^2+5+2\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{-\varphi^2-2\varphi-1+4\varphi+3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{-\varphi-1-2\varphi-1+4\varphi+3}}{2}=\frac{\sqrt{\varphi+1}}{2}=\frac{\sqrt{\varphi^2}}{2}$$
$$=\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

これで、切り取る三角形の形がわかりました。

## 7.3 固定台の設計

続いて立方体を固定する台の設計に移りましょう。

図 7-11 のような台を作り、発砲スチロールを図 7-13 のように固定します。このとき、(d) の部分を切断することになります。このような台において、図 7-12 の三角形 (a),(b),(c) がどのようなものになるか計算します。

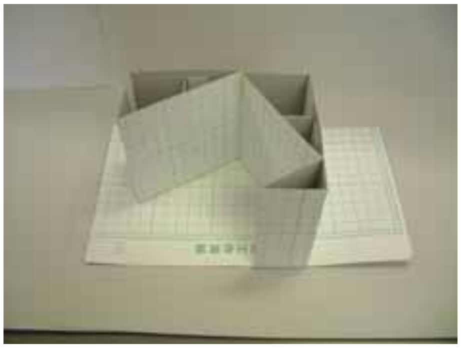


図 7-11

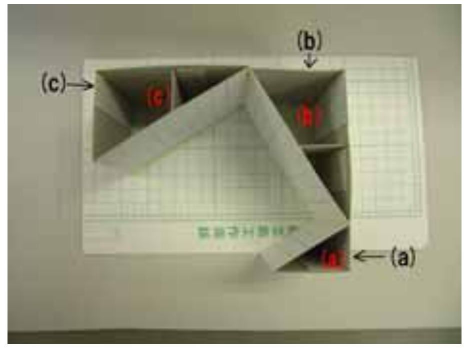



図 7-12

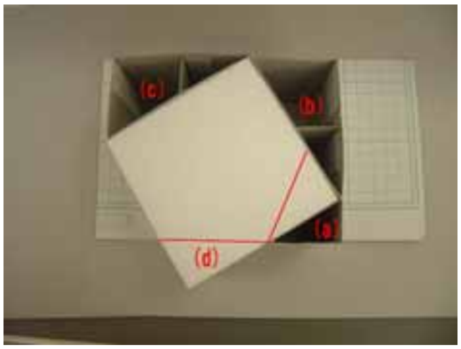



図 7-13

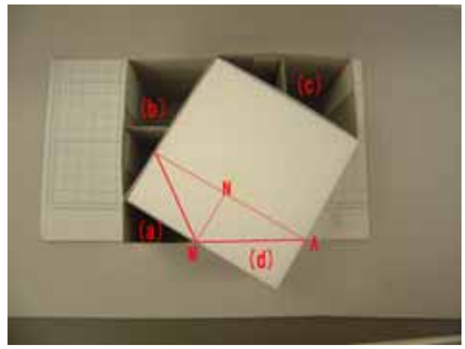



図 7-14

図 7-14 において、点 M は立方体の辺の中点であり、$\triangle$MNA と三角形 (d) は合同になっています。

図中の 4 つの三角形 (a),(b),(c),(d) はすべて相似な三角形なので、三角形 (d) をもとに、比を使ってそれぞれの長さを出していくことにします。

三角形 (d) については、前節の計算によって、

$$\mathrm{AN}:\mathrm{MN}:\mathrm{AM}=\frac{\varphi+1}{2}:\frac{\varphi}{2}:\frac{\sqrt{4\varphi+3}}{2}=(\varphi+1):\varphi:\sqrt{4\varphi+3}$$

となります。

さらに、$\varphi^2=\varphi+1$ を用いると、

$$\mathrm{AN}:\mathrm{MN}=(\varphi+1):\varphi=\varphi^2:\varphi=\varphi:1$$

であることがわかるので、

$$\mathrm{AN}:\mathrm{MN}:\mathrm{AM}=\varphi:1:\sqrt{\varphi+2}$$

でもあります。

### 三角形 (a)(b)(c)(d) について

4 つの三角形はすべて相似で、三角形 (a) は斜辺の長さが 5cm となり、三角形 (b)(c) は斜辺が 10cm、三角形 (d) は $\triangle$AMN の辺 AN に対応する部分が 5cm となります。

斜辺を 1 としたときには、

$$\mathrm{AN}:\mathrm{MN}:\mathrm{AM}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}:\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}:1$$

となります。この比は、辺 AN を 1 とした場合には

$$\mathrm{AN}:\mathrm{MN}:\mathrm{AM}=1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}:\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

となっています。

したがって、三角形 (a) については

$$\text{辺 AN に対応する辺} = 5 \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \mathrm{cm} \approx\ 4.25\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 MN に対応する辺} = 5 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ \mathrm{cm}\ \ \approx\ 2.63\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 AM に対応する辺} = 5\ \mathrm{cm}$$

となります。

また、三角形 (b)(c) については

$$\text{辺 AN に対応する辺} = 10 \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \mathrm{cm}\ \ \approx\ 8.61\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 MN に対応する辺} = 10 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \mathrm{cm}\ \ \approx\ 5.26\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 AM に対応する辺} = 10\ \mathrm{cm}$$

となります。

さらに、三角形 (d) については、

$$\text{辺 AN に対応する辺} = 5\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 MN に対応する辺} = 5 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \mathrm{cm}\ \ \approx\ 3.09\ \mathrm{cm}$$
$$\text{辺 AM に対応する辺} = 5 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ \mathrm{cm} \approx\ 5.88\ \mathrm{cm}$$

となります。

最後に電卓を使って近似値をだすと図 7-15,7-16 のようになりました。

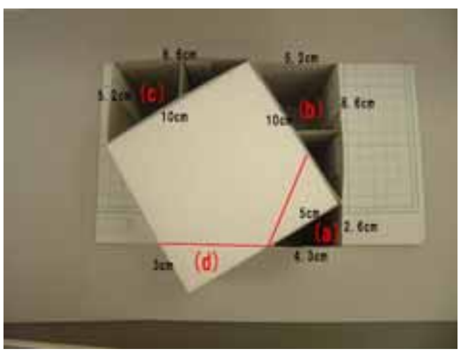



図 7-15

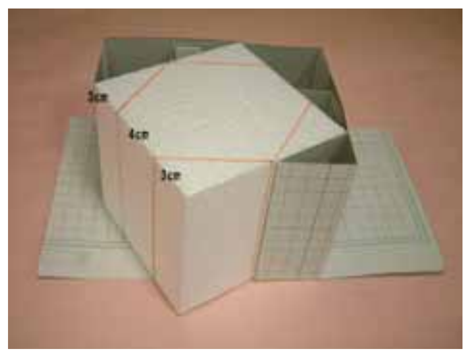



図 7-16

実際に作った台は発砲スチロールが熱で解ける分や電熱線が通る分の余裕をもたせ、若干補正を加えました。

またこの計算をもとに、発砲スチロールの立方体には、切断の目印とする線を書き込みました。

## 7.4 正五角形となることの証明

六つある立方体の各面を 7.3 節のように切断して二つの斜面を出していくと、合計十二の面ができます。こうしてできる面が正五角形ではないかもしれません。本当に正五角形になるかどうか確かめました。

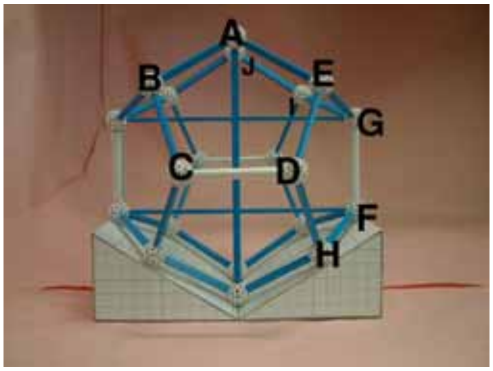



図 7-17

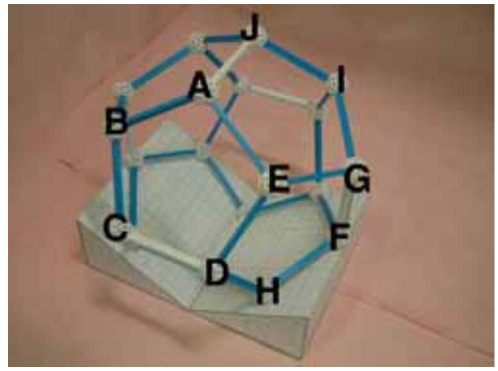



図 7-18

改めて正十二面体の点を、図のように A〜J とおきます。
7.3 節に述べた切断は、点 A,C,D,G,J が正十二面体の所定の点となるように計算したものです。このように切断したときに、点 B,E,H,I は切断する平面との交点として自動的に決まってくる点です。この点を加えた五つの点 A,B,C,D,E が正五角形を作るかどうかが問題となります。

そこで、切った時に現れる点 B,E などを求めて $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}=1, \angle\mathrm{BAE}=108^\circ$ であることを証明します。他の点については対称性から同じになることがわかります。

はじめの立方体の対角線の交点（正十二面体の「中心」）を原点として、$\mathrm{AB}=1$ とすると、7.2 節の計算によって、

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},0,\frac{\varphi+1}{2}\right),\ \mathrm{C}\left(\frac{\varphi+1}{2},-\frac{1}{2},0\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{\varphi+1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$\mathrm{F}\left(0,\frac{\varphi+1}{2},-\frac{1}{2}\right)\ \mathrm{G}\left(0,\frac{\varphi+1}{2},\frac{1}{2}\right)\ \mathrm{J}\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\varphi+1}{2}\right)$$

とおくことが出来ます。

そして、このようにおいたとき、点 E の座標を求めます。

そのための準備として、二つのベクトルに垂直なベクトルの求め方を計算します。

### 7.4.1 二つのベクトルに垂直なベクトルの求め方

二つのベクトル $\overrightarrow{a}=(p,q,r)$、$\overrightarrow{b}=(s,t,u)$ に対して垂直なベクトル $\overrightarrow{c}$ の成分を $\overrightarrow{c}=(x,y,z)$ とすると、$\overrightarrow{c}$ は二つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ に垂直なので、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$ かつ $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$ が成り立ちます。

したがって

$$\begin{cases} px+qy+rz=0 & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ sx+ty+uz=0 & \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases}$$

これを解くのですが、後から使う場合は $pt-qs\neq 0$ の場合に限定しても大丈夫なので、この条件を付けておきます。

$$\times t - \quad \times q \text{ より} \quad (pt - qs)\,x + (rt - qu)\,z = 0$$

$$pt - qs \neq 0 \text{ より} \qquad x = \frac{qu - rt}{pt - qs} \cdot z$$

同様にして

$$\times s - \quad \times p \text{ より} \quad (qs - pt)\,y + (rs - pu)\,z = 0$$

$$pt - qs \neq 0 \text{ より} \qquad y = \frac{rs - pu}{pt - qs} \cdot z$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= \left( \frac{qu - rt}{pt - qs} \cdot z, \left( \frac{rs - pu}{pt - qs} \right) \cdot z, z \right) \\
&= z \left( \frac{qu - rt}{pt - qs}, \frac{rs - pu}{pt - qs}, 1 \right) \\
&= \frac{z}{pt - qs} \left( qu - rt, rs - qu, pt - qs \right)
\end{aligned}$$

となります。

### 7.4.2 点 E の求め方

点 E は、平面 ABCDE と平面 EDHFG と平面 AEGIJ という三つの平面の交点です。この点の座標を求めるために、この条件を分解します。二つの平面の共有点を考えました。

平行でない二つの平面の共有点は一つの直線になります。平面 ABCDE と平面 EDHFG の共有点は直線 DE となり、また平面 ABCDE と平面 AEGIJ の共有点は直線 AE となります。そして求める点 E は二つの直線 DE と AE の交点になります。点 E の座標はこれを計算して求めることができるはずです。念のため、平面 EDHFG と平面 AEGIJ の共有点である直線 EG も同じ点 E を通ることも示しました。

直線 AE と直線 GE の交点を求めるためには、直線 AE の方向を決めるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と直線 GE の方向を決めるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ を求める必要があります。

方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は、平面 ABCDE 上にあり、同時に平面 AEGIJ 上にもあります。「直線 AE が平面上 ABCDE 上にある」という条件は、「直線 AE が平面 ABCDE の法線ベクトルに垂直である」という条件と同値になります。そこで平面 ABCDE の法線ベクトルを求めることにしました。平面 ABCDE を決める 5 点のうち、３つの点 A,C,D については座標がわかっています。したがって、平面 ABCDE の法線ベクトル $\overrightarrow{x}$ は、二つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に垂直なベクトルとして求めることができます。

7.4.1 節で示した二つのベクトルに垂直なベクトルの求め方を用います。

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (p, q, r) = \left( \frac{\varphi}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi + 1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (s, t, u) = \left( \frac{\varphi}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi + 1}{2} \right)$$

なので、この二つに垂直なベクトルは、

$$\frac{z}{pt - qs} \left( qu - rt, rs - qu, pt - qs \right) = \frac{2z}{\varphi} \left( \frac{\varphi + 1}{2}, 0, \frac{\varphi}{2} \right)$$

ここでは方向がわかればよいので、平面 ABCDE の法線ベクトルとして

$$\overrightarrow{x} = (\varphi + 1, 0, \varphi)$$

を使うことにします。

平面 EDHFG の法線ベクトル $\overrightarrow{y}$ は、二つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = (p, q, r) = \left(-\frac{\varphi+1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = (s, t, u) = \left(-\frac{\varphi+1}{2}, \frac{\varphi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

に垂直なベクトルとして、同様にして

$$\overrightarrow{y} = (\varphi, \varphi+1, 0)$$

を使います。

平面 AEGIJ の法線ベクトル $\overrightarrow{z}$ は、二つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = (p, q, r) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi+1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GJ}} = (p, q, r) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi+1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$$

に垂直なベクトルとして

$$\overrightarrow{z} = (0, \varphi, \varphi+1)$$

を使います。

次に直線AEの方向ベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めます。直線AEは平面ABCDE上にあるから、平面ABCDEの法線ベクトル $\overrightarrow{x}$ に垂直であり、同時に平面AEGIJ上にあるから、平面AEGIJの法線ベクトル $\overrightarrow{z}$ にも垂直です。したがって、これも前節の結果を用いると、直線AEの方向ベクトル $\overrightarrow{u}$ は

$$\overrightarrow{u} = (\varphi+1, 3\varphi+2, -2\varphi-1)$$

となります。

また直線DEの方向ベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めます。直線DEは平面ABCDE上にあるから、平面ABCDEの法線ベクトル $\overrightarrow{x}$ に垂直であり、同時に平面EDHFG上にあるから、平面EDHFGの法線ベクトル $\overrightarrow{y}$ にも垂直です。したがって、これも前節の結果を用いると、直線AEの方向ベクトル $\overrightarrow{v}$ は

$$\overrightarrow{v} = (-2\varphi-1, \varphi+1, 3\varphi+2)$$

となります。

直線EGの方向ベクトル $\overrightarrow{w}$ を求めます。直線EGは平面EDHFG上にあるから、平面EDHFGの法線ベクトル $\overrightarrow{y}$ に垂直であり、同時に平面AEGIJ上にあるから、平面AEGIJの法線ベクトル $\overrightarrow{z}$ にも垂直です。したがって、これも前節の結果を用いると、直線AEの方向ベクトル $\overrightarrow{w}$ は

$$\overrightarrow{w} = (3\varphi+2, -2\varphi-1, \varphi+1)$$

となります。

以上の準備のもとで、いよいよ $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を求めます。
$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{w}$ を用いて次のようにあらわせます。

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\varphi+1}{2}\right) + l\,(\varphi+1, 3\varphi+2, -2\varphi-1) & \cdots \\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + m\overrightarrow{w} = \left(0, \frac{\varphi+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + m\,(3\varphi+2, -2\varphi-1, \varphi+1) & \cdots \\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + n\overrightarrow{v} = \left(\frac{\varphi+1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + n\,(-2\varphi-1, \varphi+1, 3\varphi+2) & \cdots \end{cases}$$

それぞれの成分は一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+l(\varphi+1)=m(3\varphi+2) \\ l(3\varphi+2)=\dfrac{\varphi+1}{2}-m(2\varphi+1) \\ \dfrac{\varphi+1}{2}-l(2\varphi+1)=\dfrac{1}{2}+m(\varphi+1) \end{cases}$$

より、$l=m=\dfrac{3\varphi+2}{26\varphi+16}$ これを　,　,　に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\frac{21\varphi+13}{26\varphi+16},\frac{21\varphi+13}{26\varphi+16},\frac{\varphi}{2}\right)$$

となります。さらに、これは有理化をすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$$

となります。

この結果を用いて、辺 EA,ED,EG の長さを求めます。

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\left(\frac{1-\varphi}{2},-\frac{\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\left(\frac{1}{2},\frac{1-\varphi}{2},-\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\left(-\frac{\varphi}{2},\frac{1}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$$

より、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{EA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\varphi}{2}\right)^2}=1$$

となります。図形の対称性から点 B についても $\mathrm{BA}=\mathrm{BC}=1$ がわかります。B,E 以外にも同様の位置にある点についても同じことです。また、A,C,D のような点については、最初から座標がわかっていて、辺 CD についても $\mathrm{CD}=1$ がわかります。以上のことから、できる五角形の各辺の長さはみな等しいことが示されました。

つぎに、角度について調べてみましょう。

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\left(\frac{1-\varphi}{2},-\frac{\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\varphi-1}{2},-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\varphi}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(0,-1,0)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\varphi}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(12,\frac{1-\varphi}{2},\frac{\varphi}{2}\right)\cdot(0,1,0)=\frac{1-\varphi}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{1-\varphi}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\varphi-1}{2},-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\varphi}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\frac{\varphi-1}{2},-\frac{\varphi}{2},-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{\varphi}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\varphi}{2}$$

となります。二つのベクトルのなす角度は

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}=|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|\cos\angle\mathrm{AED}$$

により求められますが、各ベクトルの長さは 1 なので

$$\cos\angle\mathrm{AED}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

となります。これだけでも、切断によって現れる五角形のすべての内角が等しいことが示されていますが、さらに、

$$\cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

であることから、1 つの内角が $108^\circ$ となっていることもわかります。

最後に $108^\circ$ の余弦を求めましょう。$\theta = 72^\circ$ としましょう。$5\theta = 360^\circ$ なので $3\theta = 360^\circ - 2\theta$ となるので、

$$\cos 3\theta = \cos 360^\circ - 2\theta = \cos 2\theta$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\
&4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \\
&(\cos\theta - 1)\left(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\right) = 0
\end{aligned}$$

$0 < \cos\theta < 1$ より、

$$\cos\theta = \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ということがわかります。

これから、

$$\cos 108^\circ = \cos\left(180^\circ - 72^\circ\right) = -\cos 72^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

となりました。

## 7.5 切断の様子

図 7-19

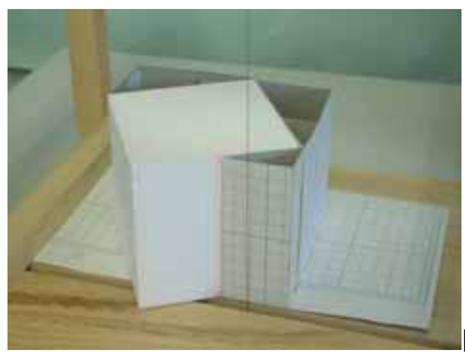


図 7-20

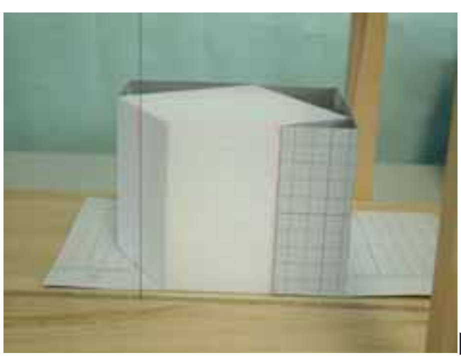


図 7-21

図 7-22

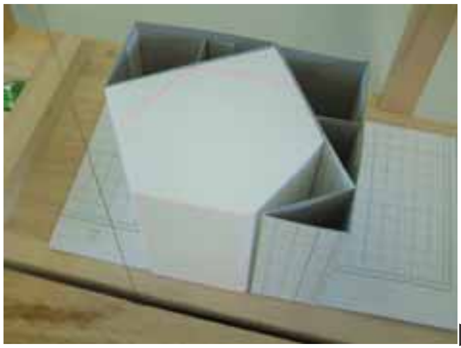


図 7-23


図 7-24

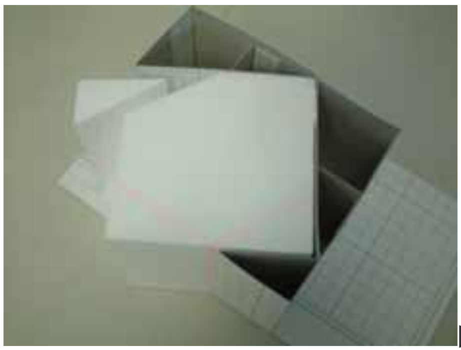


図 7-25


図 7-26


図 7-27

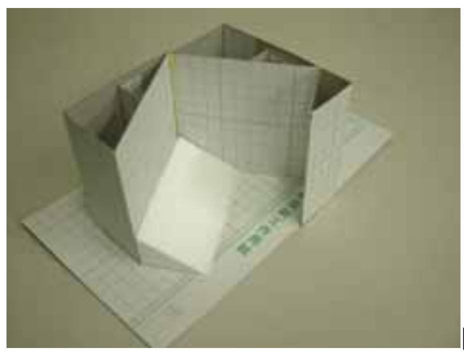


図 7-28

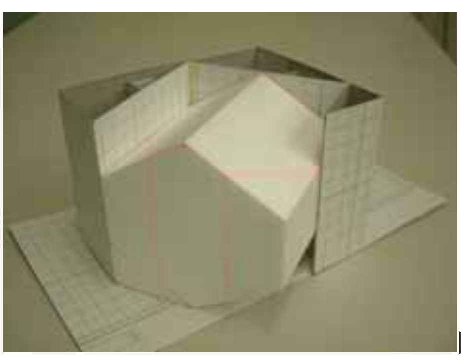


図 7-29

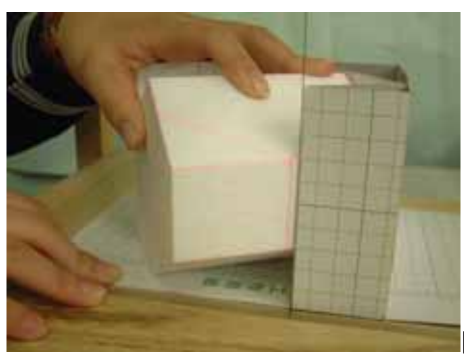


図 7-30

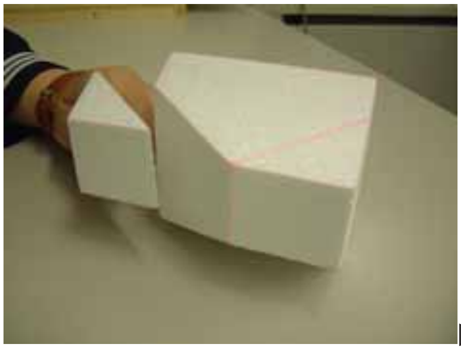


図 7-31

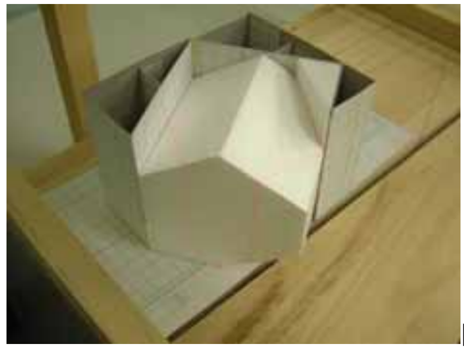


図 7-32

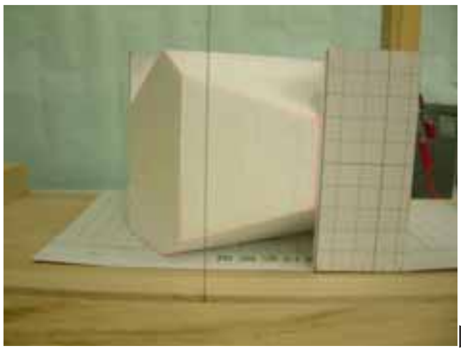


図 7-33


図 7-34


図 7-35

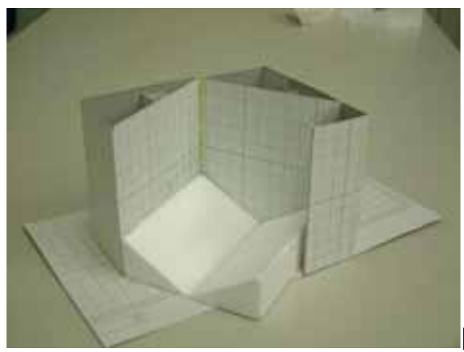


図 7-36

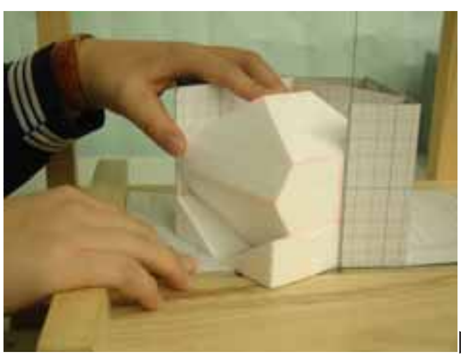


図 7-37

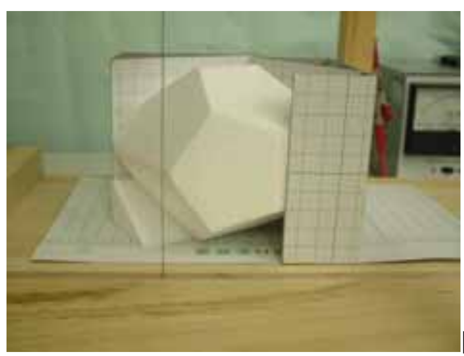


図 7-38


図 7-39

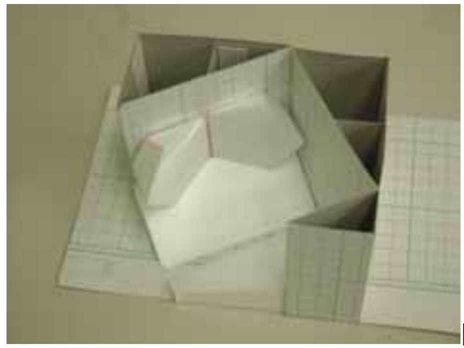


図 7-40

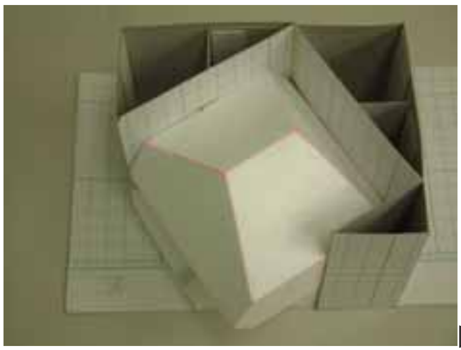


図 7-41

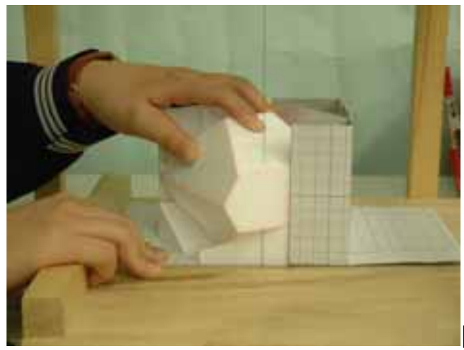


図 7-42

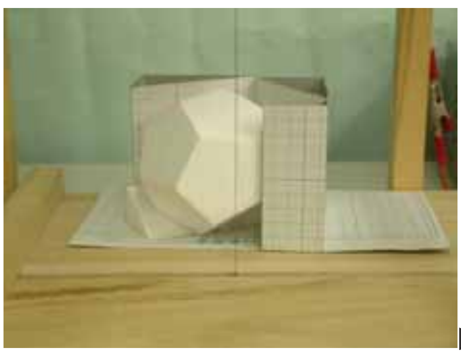


図 7-43


図 7-44

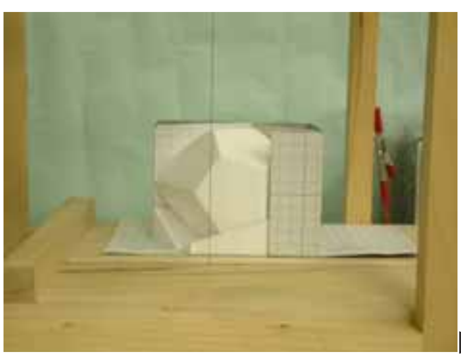


図 7-45


図 7-46

# 8 正二十面体

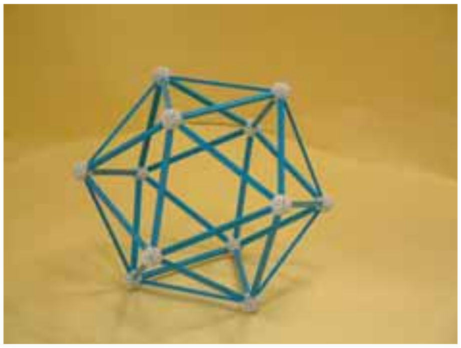


図 8-1

正二十面体もこれまでと同様に、実際に Zome Tool で正二十面体を作り、観察しました。（図 8-1）

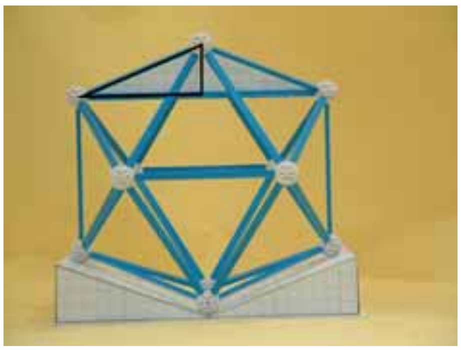


図 8-2

図 8-2 のような台に置くと、正十二面体と同じく元の立方体の部分が、6 本の辺として残っていることがわかりました。そこで、正十二面体と同じ要領で台になっている三角柱を切り取ることから始めました。そのために図 8-2 で示した三角形がどのようなものかを調べます。

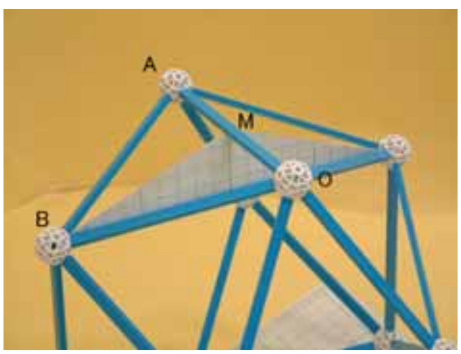



図 8-3

正二十面体の１辺の長さを２とします。また、図 8-3 のように正三角形 ABO を置きます。AO の中点 M と B を結ぶと BM=$\sqrt{3}$ となります。

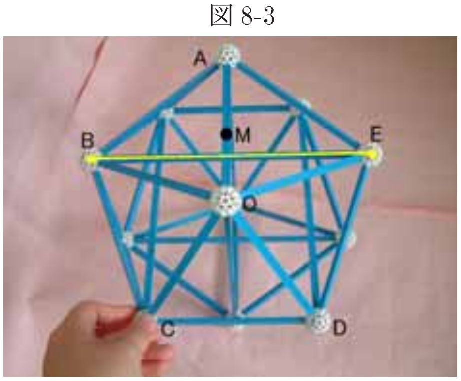



図 8-4

次に正二十面体を図 8-4 の角度から見たとき正五角形が現れます。正五角形の一辺を 1 としたときの対角線の長さは 7.1 節で求めたように $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となります。

正五角形 ABCDE は一辺の長さを 2 としているので

$$\mathrm{BE} = 2\varphi$$

となります。

点 M から BE に下ろした垂線との交点を P とすると図 8-2 で示した三角形は △BPM と置けます。(図 8-5)

P は BE の中点になっているので BP=$\varphi$ とわかります。△BPM は ∠BPM=90° の直角三角形なので残りの辺 PM は三平方の定理を用いて、

$$\mathrm{BP}^2+\mathrm{PM}^2=\mathrm{BM}^2$$

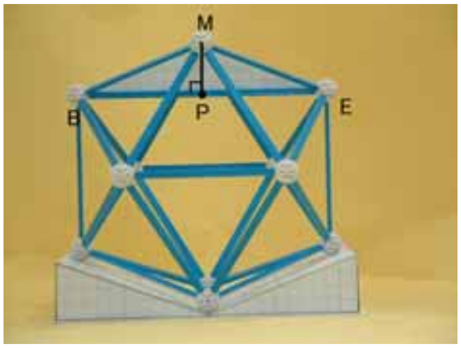



図 8-5

$$\begin{aligned}\mathrm{PM}^2 &= (\sqrt{3})^2-\varphi^2 = 3-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\\ &= 3-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\ \mathrm{PM} &= \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ &= \frac{(1+\sqrt{5})-2}{2}=\varphi-1\end{aligned}$$

これで切り取る三角形の形がわかりました。

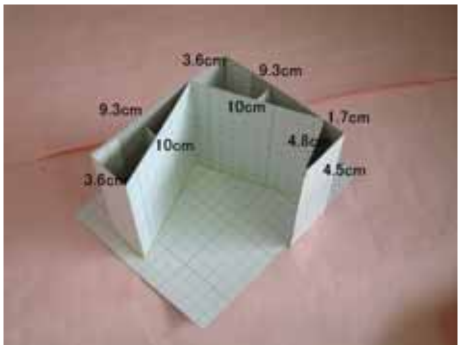



図 8-6

$$\mathrm{BP{:}MP{:}BM}=\varphi:\varphi-1:\sqrt{3}$$

となっています。BM を 1 としたときは

$$\begin{aligned}\mathrm{BP{:}MP{:}BM}&=\frac{\varphi}{\sqrt{3}}:\frac{\varphi-1}{\sqrt{3}}:1\\ &=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}:\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}:1\end{aligned}$$

となります。

これをもとにして、7.3 節と同様にして固定台の三角形の各辺を計算します。計算の結果は図 8-6 のようになります。

図 8-7

実際に切ってみます。すると図 8-7 のような十二面体ができあがりました。しかし、これではまだ完成ではありません。この多面体をさらに切断する必要がありそうです。

そこで、正二十面体とできた多面体、そして立方体を見比べてどのような関係になっているか、観察し直しました。(図 8-8)

図 8-8

図 8-9

するとできた多面体の図 8-9 で示した部分を切り取れば、正二十面体になりそうです。そこで、本当に切り取る部分の図形が正三角形になるか調べるために、座標を置いて長さを計算して出すことにしました。

まず、切り取る立方体の一辺の長さを 1 とします。そして、立方体の一辺の長さを 2 にしたとき、最初に切り取る図 8-2 で示した三角形の 3 辺の長さを求めます。(図 8-10)

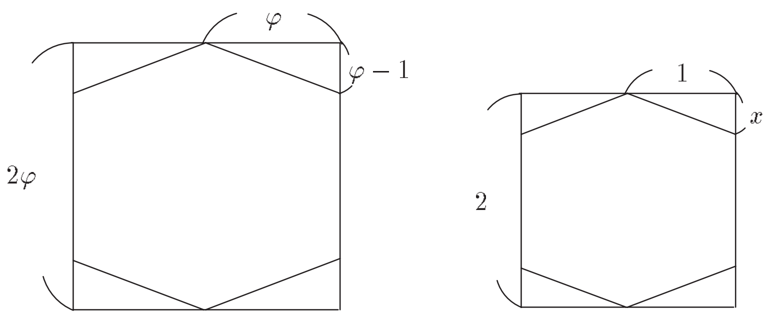



図 8-10

$\varphi : 1 = (\varphi - 1) : x$　　より　　$x = 1 - \dfrac{1}{\varphi}$

これをもとに立方体の中心を原点として座標を図 8-11,12 のように

$$\mathrm{A}\left(0, \frac{1}{\varphi}, 1\right) \qquad \mathrm{B}\left(\frac{1}{\varphi}, 1, 0\right) \qquad \mathrm{C}\left(1, 0, \frac{1}{\varphi}\right)$$

と置きます。

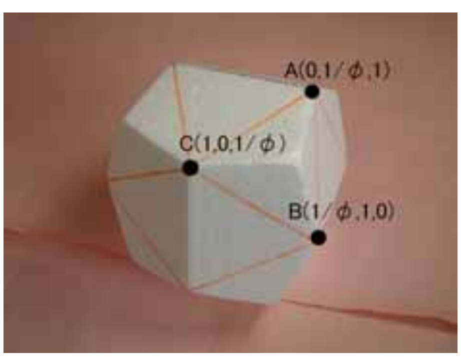



図 8-11

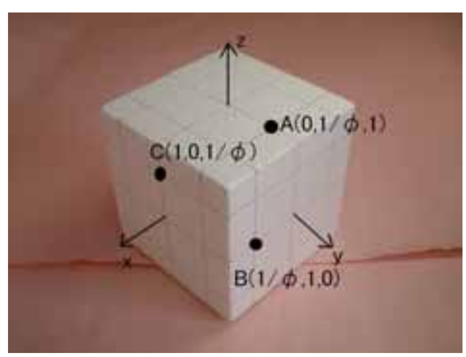



図 8-12

この座標を用いて AB = BC = CA であるかどうかを調べます。

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\frac{1}{\varphi}-0\right)^2+\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1-\frac{2}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}+1}=\sqrt{\frac{2\varphi^2+2\varphi+2}{\varphi^2}}$$

ここで $\varphi$ は $x^2-x-1=0$ の解なので $\varphi^2=\varphi+1$ となります。

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\frac{2(\varphi+1)-2\varphi+2}{\varphi^2}}=\sqrt{\frac{4}{\varphi^2}}=\frac{2}{\varphi}$$

同様に BC、CA を出します。

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}&=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)^2+(0-1)^2+\left(\frac{1}{\varphi}-0\right)}=\sqrt{1-\frac{2}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}+1+\frac{1}{\varphi^2}}\\&=\sqrt{\frac{2\varphi^2+2\varphi+2}{\varphi^2}}=\sqrt{\frac{2(\varphi+1)-2\varphi+2}{\varphi^2}}=\sqrt{\frac{4}{\varphi^2}}\\&=\frac{2}{\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}&=\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{1}{\varphi}-0\right)^2+\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^2}-\frac{2}{\varphi}+1}\\&=\sqrt{\frac{2\varphi^2+2\varphi+2}{\varphi^2}}=\sqrt{\frac{2(\varphi+1)-2\varphi+2}{\varphi^2}}=\sqrt{\frac{4}{\varphi^2}}\\&=\frac{2}{\varphi}\end{aligned}$$

以上により、AB = BC = CA となり、△ABC は正三角形だということがわかりました。

また図 8-13 の点 D は $xy$ 平面に関して対称なので図 8-14 のように点 D の座標は D $\left(1,0,-\dfrac{1}{\varphi}\right)$ と置くことができ、$\mathrm{CD}=\dfrac{2}{\varphi}$ となります。したがって、AB = BC = CA = CD となります。

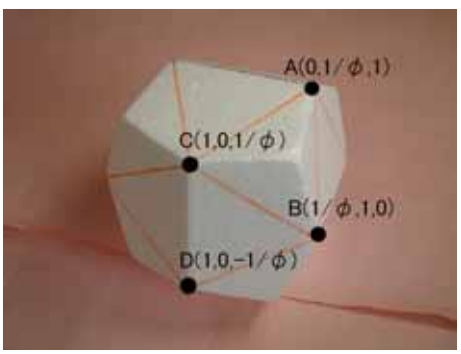



図 8-13

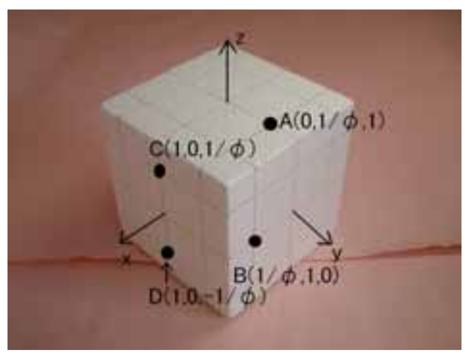



図 8-14

以上で、図 8-9 で示した部分を切り取れば正二十面体ができることがわかりました。

ここで、固定台を作ろうと考えましたが、最初に図 8-7 のように切ってしまった多面体から固定台を作って多面体を安定させることは難しいと考え、先に立方体から、3 点 A,B,C を通る平面で切断することにしました。3 点 A,B,C を通る平面が電熱線が通る平面（水平面に垂直な平面）になるように立方体を傾ける固定台を作ることにしました。

まず図 8-11,12 と同じように

$$\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{\varphi},1\right) \qquad \mathrm{B}\left(\frac{1}{\varphi},1,0\right) \qquad \mathrm{C}\left(1,0,\frac{1}{\varphi}\right)$$

と置いて、△ABC の平面の法線ベクトルを求めれば、どれくらい傾ければいいかがわかります。この法線ベクトルを $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ とします。$\overrightarrow{n}$ が平面 △ABC の法線ベクトルである条件は

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

となります。

7.4.1 節でみたように、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p,q,r)$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(s,t,u)$ に対して

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=px+qy+rz=0 & \cdots\cdots \\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=sx+ty+uz=0 & \cdots\cdots \end{cases}$$

の解は、

$$\overrightarrow{n}=k\left(qu-rt,rs-qu,pt-qs\right)$$

となります。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p,q,r)=\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}-1,-1\right) \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(s,t,u)=\left(1,\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}-1\right)$$

なので

$$(-rt+qu,rs-qu,pt-qs) = \left(\frac{-\varphi^2+\varphi-1}{\varphi^2},\frac{-\varphi^2+\varphi-1}{\varphi^2},\frac{-\varphi^2+\varphi-1}{\varphi^2}\right)$$

となるから、

$$\overrightarrow{n}=k\left(1,1,1\right)$$

と書けます。

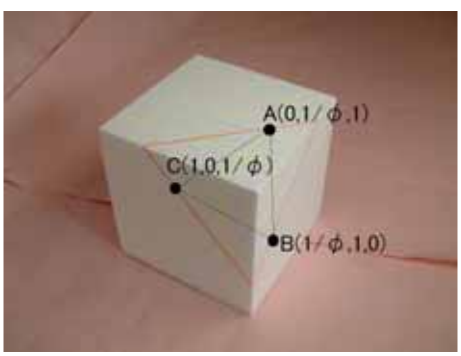


図 8-15

これで切りたい面は図 8-15 のようになっていることがわかりました。

これは、正四面体と同じ角度となっています。ここから、また二人別々で固定台を考えて作ることにしました。

## 8.1 待子の場合

まず、図 8-16 のように切りたい面を PQR と置きます。この面を水平面に対して垂直にするには図 8-17 の $\theta$ の角度に傾けます。この角度は正四面体について考えた 5 節で求めたものと同じで、$\theta \approx 35^\circ$ となっています。

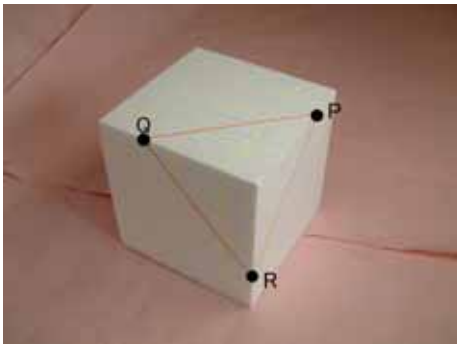


図 8-16

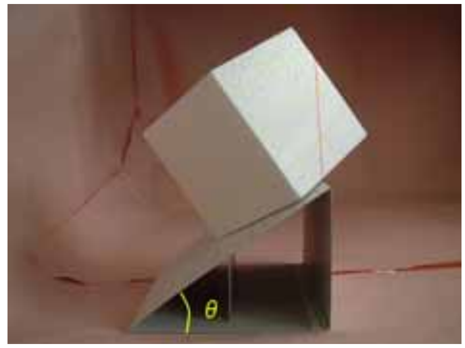


図 8-17

次に PQ を切るには電熱線が通る線上に PQ がなければなりません。固定台を作るには、図 8-18 のように立方体を置いたとき、図中（←）で示した三角形の斜辺の長さが必要となります。

そこで立方体の一辺の長さを 2 として、図 8-19 のように x 軸、y 軸をとって

$$\mathrm{A}\left(0, \frac{1}{\varphi}\right) \qquad \mathrm{B}\left(0, \frac{1}{\varphi}\right) \qquad \mathrm{C}\,(1,1) \qquad \mathrm{E}\,(-1,-1,)$$

と置きます。このとき $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{\varphi}\right)$ は図で置いたものを使います。B は $y = x$ に関して A と対称な点です。A、B の中点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2\varphi}, \dfrac{1}{2\varphi}\right)$ をとります。ここから EQ を出します。

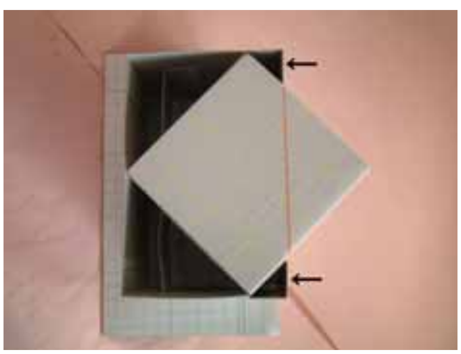


図 8-18

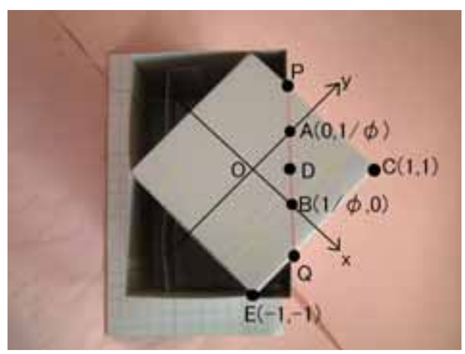


図 8-19

$$\mathrm{CD} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\varphi}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\varphi^2 - 4\varphi + 1}{2\varphi^2}} = \frac{2\varphi - 1}{\varphi\sqrt{2}}$$

このとき △CDQ は直角二等辺三角形なので

$$\mathrm{CQ} = \sqrt{2} \times \frac{2\varphi - 1}{\varphi\sqrt{2}} = \frac{2\varphi - 1}{\varphi} = 2 - \frac{1}{\varphi}$$

立方体の一辺の長さは 2 としているので EQ = 2 − CQ となります。したがって

$$\mathrm{EQ} = 2 - \left(2 - \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{\varphi}\left(= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\mathrm{EQ} \approx 0.6180339\ldots$$

となります。実際に切る立方体は 10cm なので、これを 5 倍します。

$5\mathrm{EQ} \approx 3.0901695\ldots$ と出ます。

電熱線が通りやすくするために実際にはこれを 3　とし、これらをもとに固定台を作りました。完成 !! (図 8-20,21)

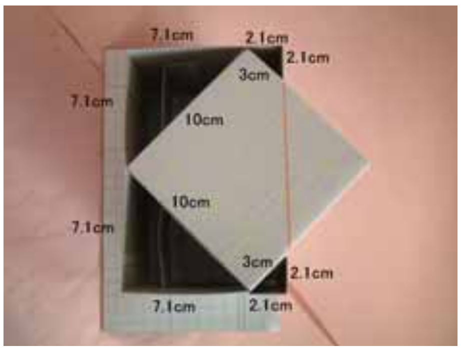


図 8-20


図 8-21

実際に切ってみます。


図 8-22

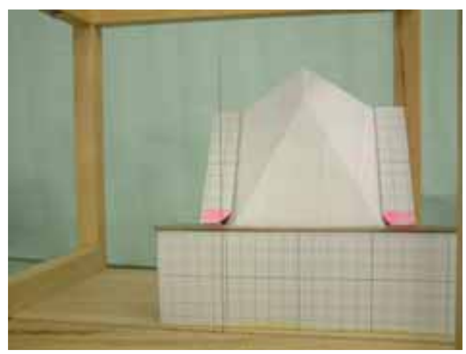


図 8-23

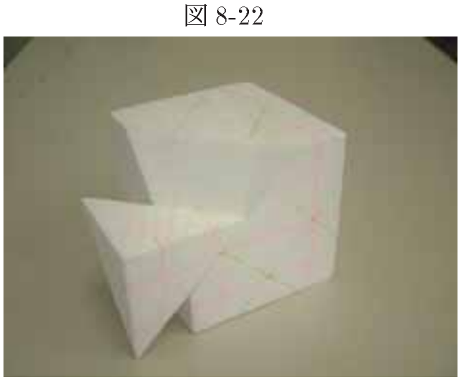


図 8-24


図 8-25

図 8-26

図 8-27

図 8-28

図 8-29

図 8-30

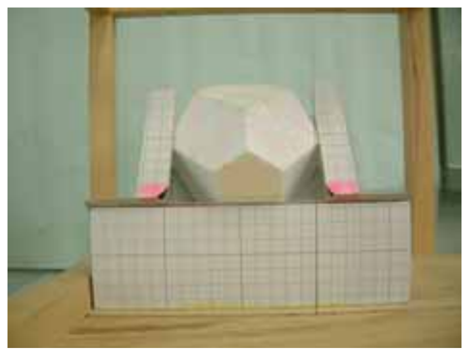


図 8-31

図 8-32

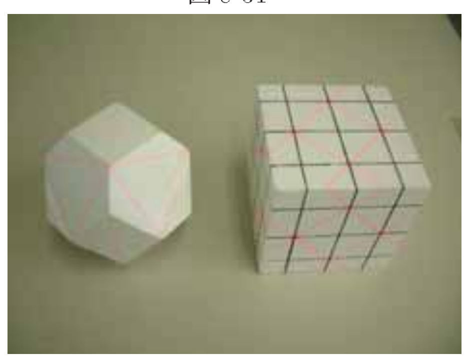


図 8-33

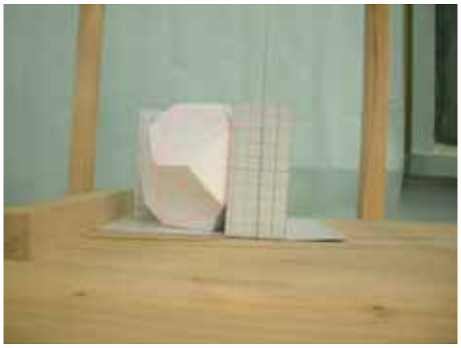


図 8-34

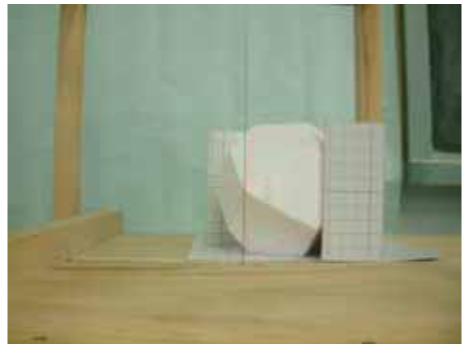


図 8-35

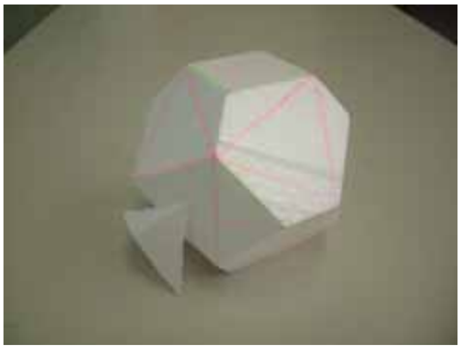


図 8-36

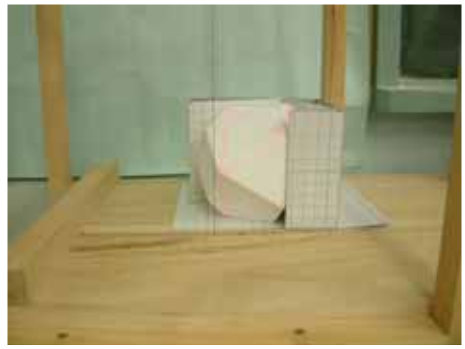


図 8-37


図 8-38

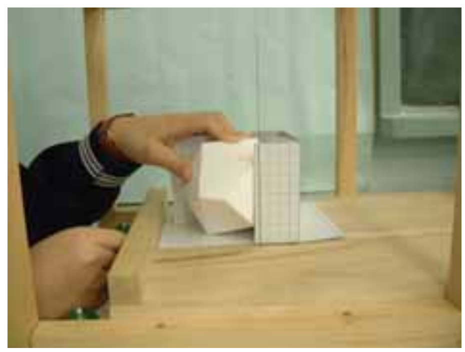


図 8-39


図 8-40


図 8-41

## 8.2 雅子の場合

8 節で求めたように図 8-42 の平面 DEF の法線ベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n} = k\,(1,1,1)$$

となり、切断面となる平面は、正四面体を作るときの切断面と似ていることが分かります。(図 5-26）切り取る三角錐は相似で、三角錐 DEFG は小さくするだけでよいのです。

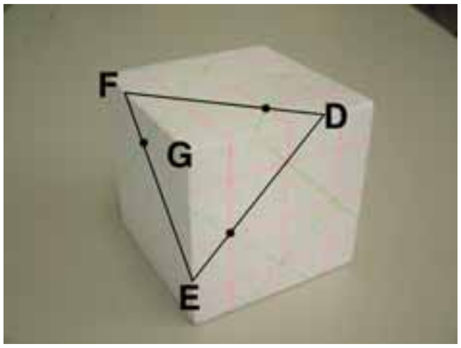



図 8-42

図 8-43

これより、点 D,E,F を求めます。上から見ると次の図 8-44,8-45 のようになります。

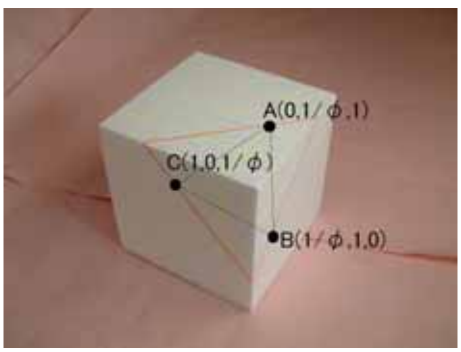



図 8-44

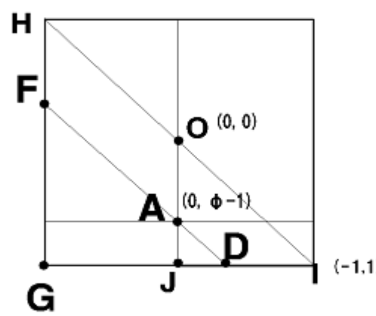



図 8-45

図のように点 H,I,J とします。立方体の一辺の長さを 2 とするとき、$\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ であることに注意すると、$\mathrm{AJ} = \mathrm{DJ} = 1 - (\varphi - 1) = 2 - \varphi$ より、点 D の座標は

$$\mathrm{D}\,(2 - \varphi, -1)$$

となるので

$$\mathrm{DG} = \mathrm{EG} = \mathrm{FG} = 3 - \varphi$$

となります。

実際に切断する立方体は一辺 10cm なので、実際の長さを出すために 5 倍します。近似値は

$$\mathrm{DG} = 5 \times (3 - \varphi) \approx 6.9 \text{ cm}$$

切る角度は正四面体と同じなので、正四面体を切断したときに使用した同じ固定台を用いることができます。あらかじめ発砲スチロールに、上で求めた値をつかって図 8-44 のように切断する線を引いておき、この線を頼りに切っていきます。

実際の切断の様子を示します。

図 8-46

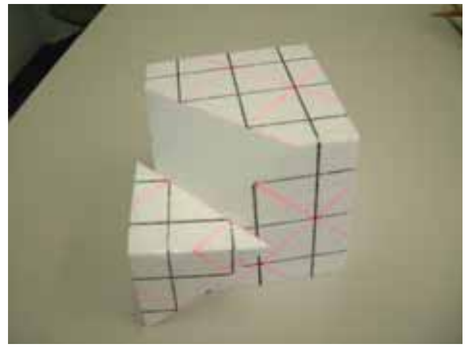


図 8-47

図 8-48

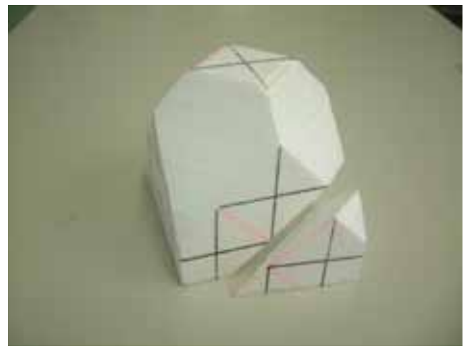


図 8-49

図 8-50

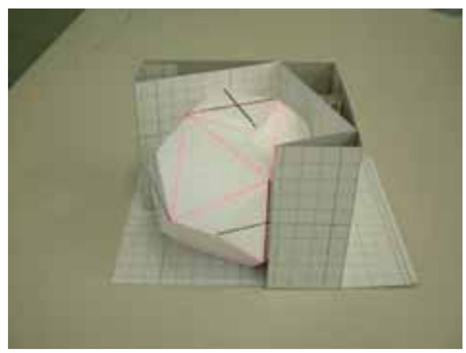


図 8-51

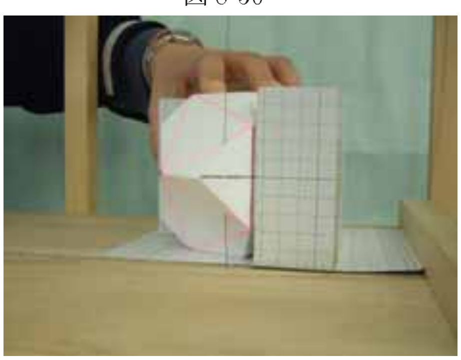


図 8-52

図 8-53

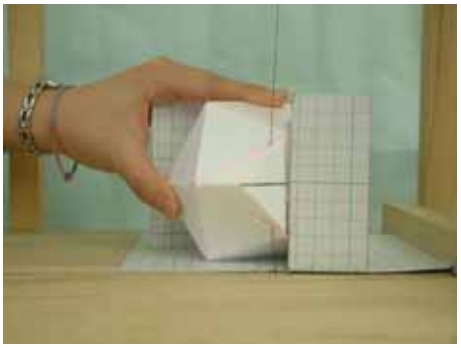


図 8-54

図 8-55

## 9. まとめ

このようにしてすべての正多面体を作ることができました。正多面体の角度や長さを計る際に、意外にもすべて授業で習った範囲で導き出すことができました。作る過程では、正多面体同士の関係性を発見しました。

まず、正四面体と正八面体。Zome Tool で観察し切る面の角度が同じだったので、同じ固定台で切ればよいことがわかりました。次に正十二面体と正二十面体。7.4.2 節で正十二面体の 1 つの面が正五角形であることを確かめるために点 E を求めました。そこの座標は $k(1,1,1)$ と出ました。一方で正二十面体のはじめに切る面の法線ベクトルも 8 節で求めたように $k(1,1,1)$ となりました。関連していることがあるのかと思い、Zome Tool を観察しなおすと、あることに気がつきました。正二十面体の各面の重心が正十二面体の頂点になっていました。正二十面体の内部に正十二面体を見出すことができたのです。また、正四面体と正八面体でも切る面の法線ベクトルが $k(1,1,1)$ になっていて、バラバラに思える正多面体同士は、何らかの関係をもっていました。

## 10. 感想

正多面体の面が増えていくごとに複雑になっていき、予想通り苦労の連続でした。しかし、最初は本当に自分達で作れるかどうかも不安だったので、すべてつくることができ、感動しました。また、複雑な計算の結果、きれいな値が出たので、図形の神秘を感じました。確かめようのない計算が続き、何度も思わぬ結果が出ましたが、それにより図形の性質を深く理解できました。これからの数学の学習にこの研究で学んだことを、いかしていきたいです。

最後に今までご指導して下さった宮本先生をはじめ、諸先生方、本当にありがとうございました。