

Zometool green line と 4 次元半正多胞体

石井源久

概要

Green line 登場以前の Zometool は、node(ジョイント) と、red, yellow, blue の各 line で構成されていた。この基本キットは、3 次元では正 20 面体系の多面体、4 次元では正 600 胞体系の多胞体の 3 次元投影図形の作成に強いものである。反面、正 4 面体系や正 8 面体系の多面体や、正 5 胞体～正 24 胞体系の多胞体の 3 次元投影図形の作成には弱いという特徴があった。しかし、拡張キットとして green line が登場したことにより、それらの図形も作成できるようになった。

本論文では、4 次元の半正多胞体の 3 次元投影図形が、green line を活用することによって、どこまで作成可能となったかを検証する。なお、red, yellow, blue, green の各色に合致する方向を、“line” と表記し、長さの定められた各々のパーツを示す場合には、“strut” と表記する。

1 正多胞体の配置

4 次元正多胞体 6 種類の、(上から) 胞心・面心・線心・点心による 3 次元投影図形 (以降、それぞれ胞心図形・面心図形・線心図形・点心図形という) を示す。稜線は、Zometool の red, yellow, blue, green の各 line に合わせて色付けしている。なお、灰色の稜線は、どの line ともし一致しないことを示す。

red, yellow, blue の 3 種類の line では、正 8 胞体の胞心と点心、正 16 胞体の線心、正 24 胞体の点心、正 120 胞体の胞心、正 600 胞体の点心図形を作ることができた。

Green line の登場により、上に加えて、正 5 胞体の胞心と点心 (この 2 つは一致する)、正 8 胞体の面心と線心、正 16 胞体の胞心と点心、正 24 胞体の胞心図形を作ることができるようになった。

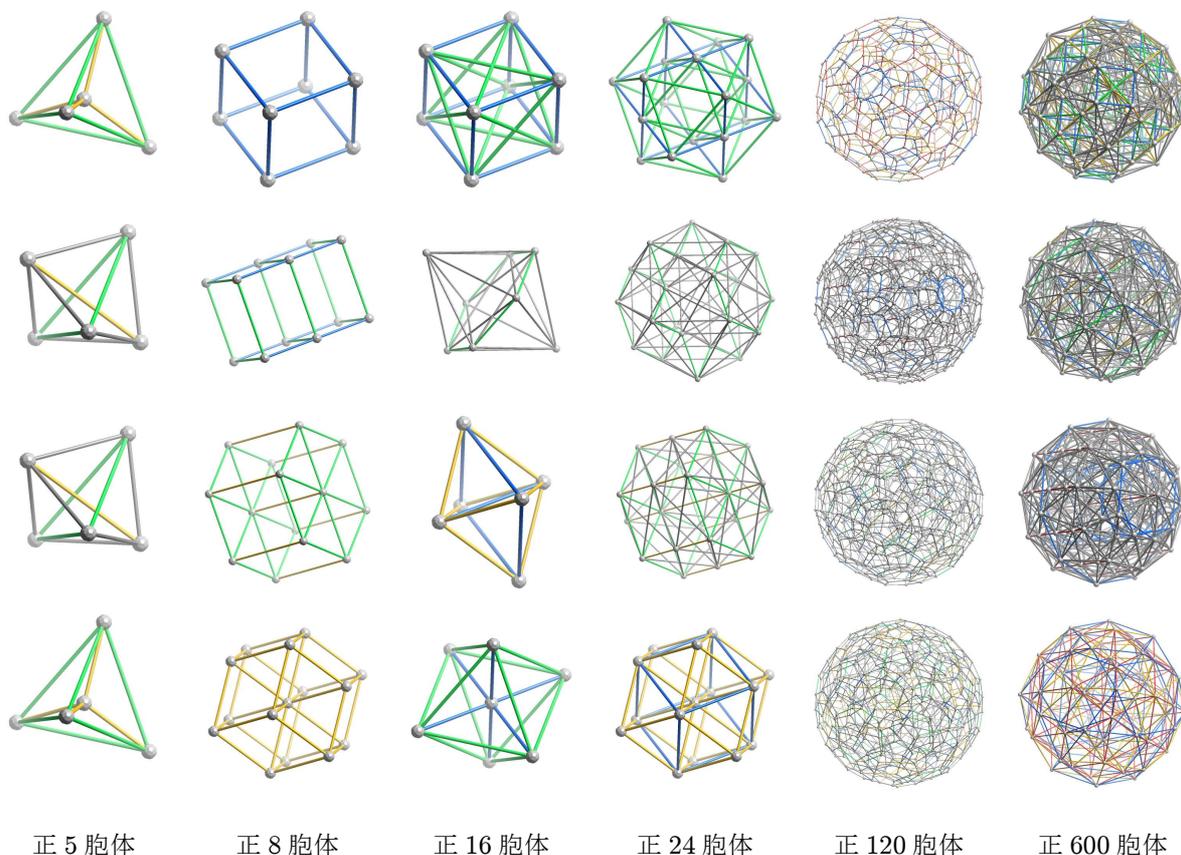


図 1: 4 次元正多胞体の 3 次元投影図

2 半正多胞体の配置

以下で、4次元半正多胞体の、3次元への投影図形を見て行くことにする。半正多胞体は、元になる正多胞体によって、正5胞体系、正16胞体系、正24胞体系、正600胞体系に分類される。半正多胞体は、元になる正多胞体と同じ方向の稜線を持つので、元になる正多胞体で使っているものと同じカラーの zometool strut が必要になる。

なお、以下の点に注意されたい。

1. 元になる正多胞体が作成できない配置では、半正多胞体も作成できないと考えられるので、元になる正多胞体が作成できる配置のみ、調べることにする。稜線の方向のチェックを行い、次に、その長さの strut が入手可能かを検証する。
2. Zometool には、green line と方向が同じだが、長さが異なる (blue line と同じ長さの) blue-green line がある。しかし、本稿では、green line と blue-green line を区別せず、両者を緑色で示している。
3. strut が交差しているところがあるが、交差位置に新たな node を置き、green および blue の "half" の strut を用いることで解決できる (node = 頂点という意味を保持するには、色違いの node を活用するとよい)。あるいは、4次元空間で裏側に回った胞を消去 (隠胞消去) すれば、交差を避けることができる。
4. 以降の、胞心・面心・線心・点心配置、とは、元になる正多胞体を基準にしたものである。そのため、例えば、線心といったときに、その半正多胞体における1つの稜線が中央に来ているとは限らない。

2.1 正600胞体系の半正多胞体

正120胞体と正600胞体を元にして作られる、半正多胞体の3次元投影図形は、正600胞体の点心配置 (正120胞体の胞心) に相当する配置であれば、red, yellow, blue の3種類の line を用いて作成可能である。これらは、green line 登場以前から良く知られていた。(図が複雑になるため、1/4 の領域のみ表示する。)

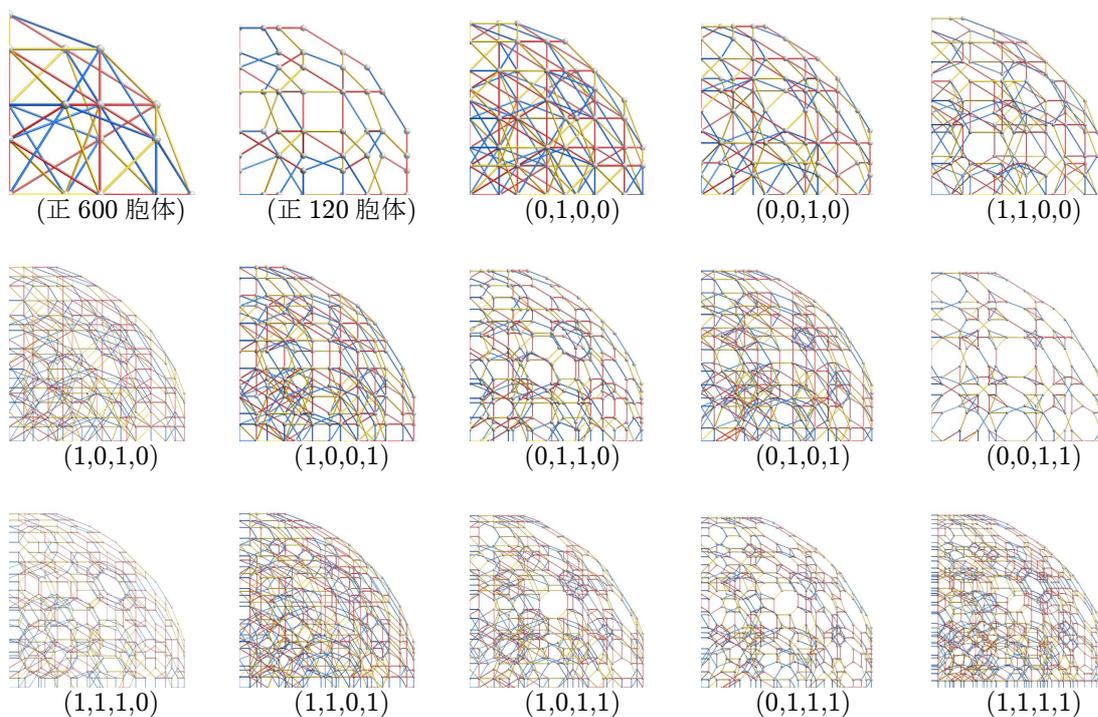


図 2: 正600胞体系の半正多胞体の3次元投影図 (正600胞体の点心配置)

2.2 正5胞体系の半正多胞体

正5胞体において、点心図形と胞心図形は一致する。正5胞体の半正多胞体は全て、この配置であれば、yellow line と green line を用いて作成が可能である。

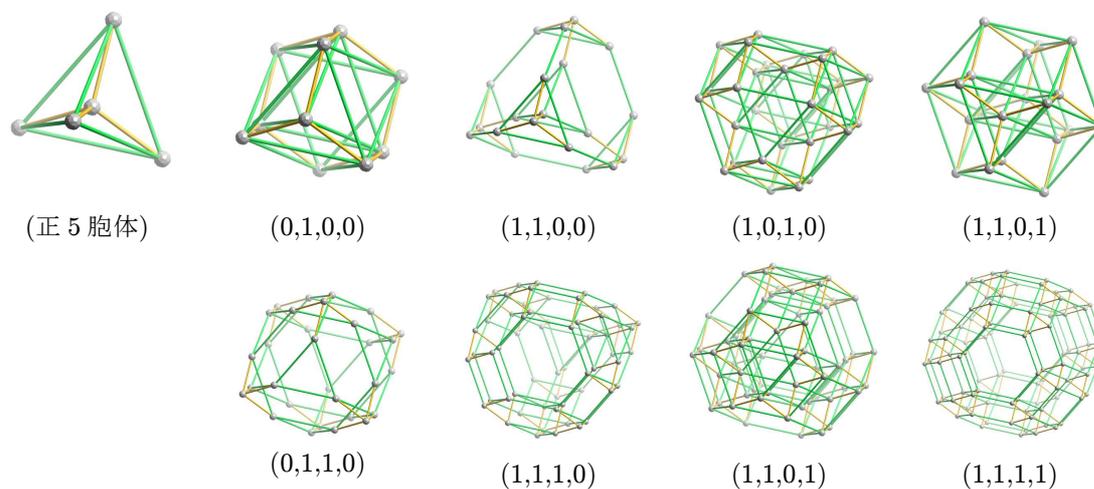


図 3: 正5胞体系の半正多胞体の3次元投影図 (正5胞体の胞心配置。点心も同じ)

2.3 正16胞体系の半正多胞体

正8胞体と正16胞体を元にして作られる半正多胞体は、正16胞体の胞心に相当する配置のものが全て作成可能である。線心および点心に相当する配置のものは、line の方向には問題がないが、blue line に、必要な長さの strut がないため、作成できない場合がある (*で示す)。これらは、green line に、blue-green の strut を用いた上で、通常の $1/\sqrt{2}$ の長さの blue strut がもしあれば、作成できる。

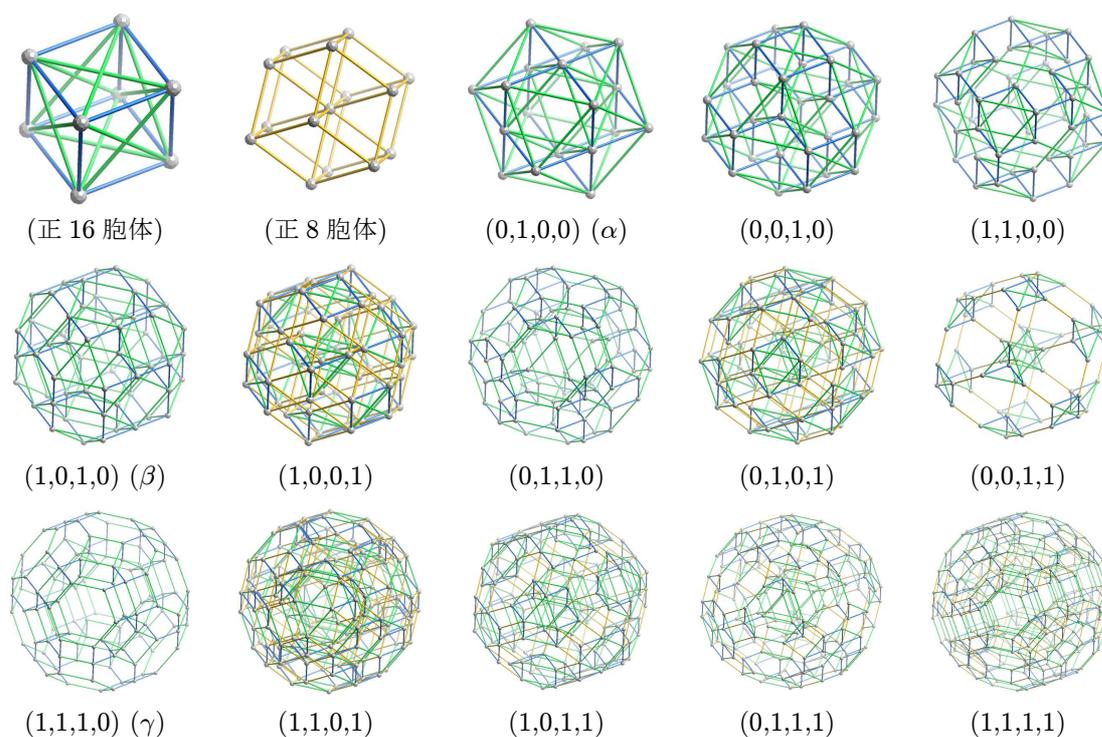


図 4: 正16胞体系の半正多胞体の3次元投影図 (正16胞体の胞心配置)

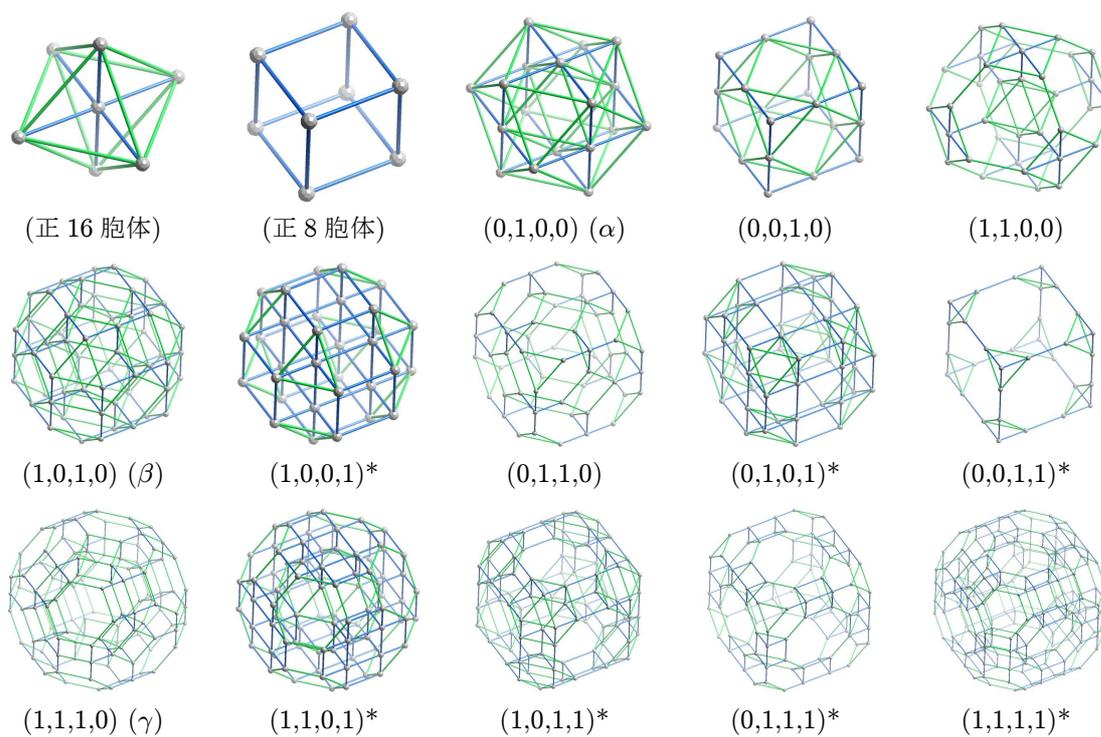


図 5: 正 16 胞体系の半正多胞体の 3 次元投影図 (正 16 胞体の点心配置)

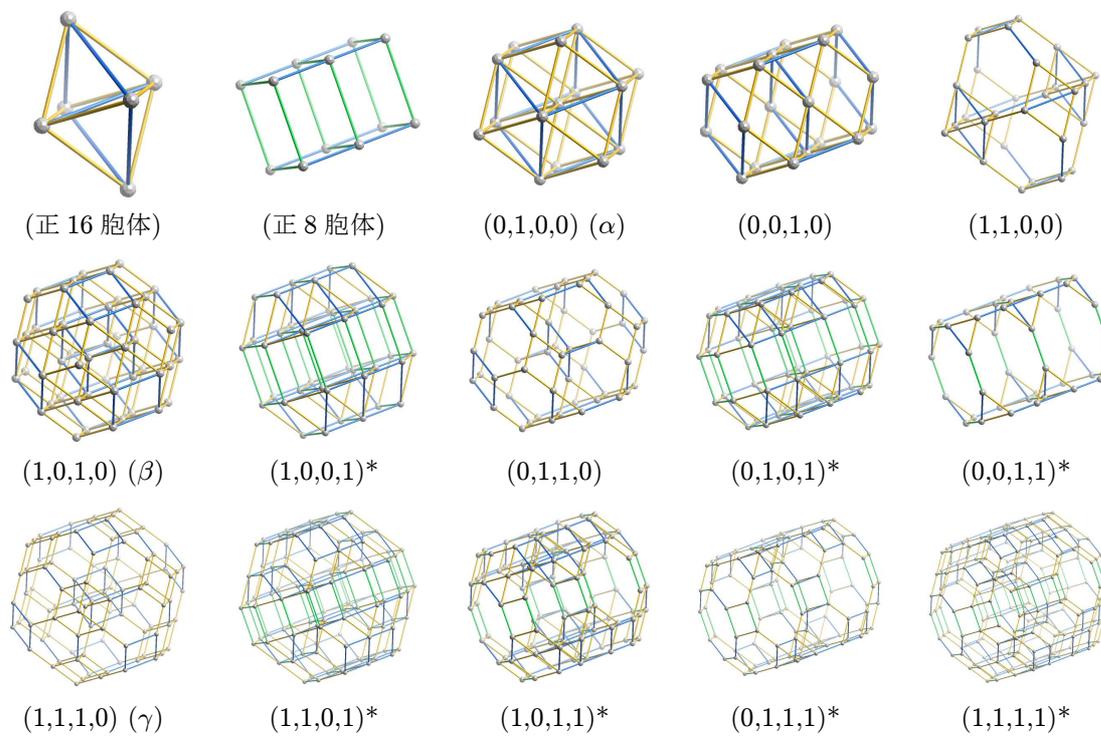


図 6: 正 16 胞体系の半正多胞体の 3 次元投影図 (正 16 胞体の線心配置)

2.4 正 24 胞体系の半正多胞体

正 24 胞体と、それを元にして作られる半正多胞体のうち、 $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ で示した 3 つは、正 16 胞体系の $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ と一致する。それら以外の半正多胞体は、blue line において、やはり、 $1/\sqrt{2}$ の長さの strut が必要になる。

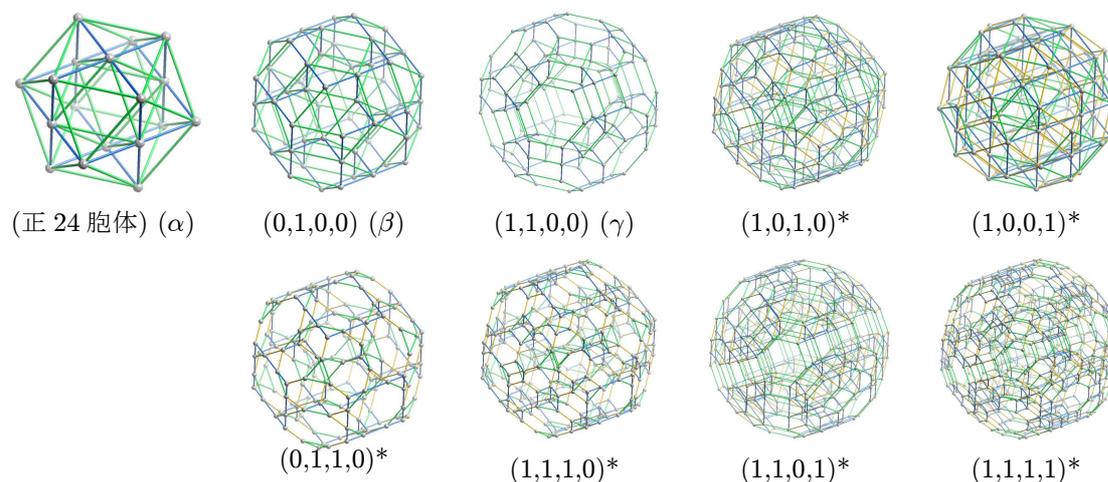


図 7: 正 24 胞体系の半正多胞体の 3 次元投影図 (正 24 胞体の胞心配置)

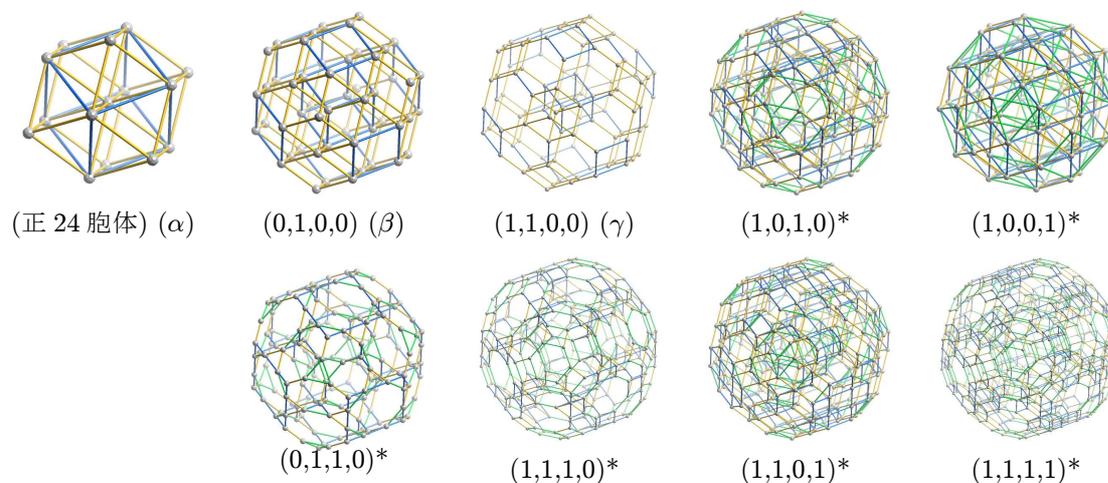


図 8: 正 24 胞体系の半正多胞体の 3 次元投影図 (正 24 胞体の点中心配置)

3 まとめ

Green line 登場以前には、red, yellow, blue の基本キットだけで、正 600 胞体系の半正多胞体が、(正 600 胞体の点中心配置にて) 全て作成可能であることが分かっていた。

そして、green line の登場によって、正 5 胞体系の胞心配置と、正 16 胞体系の胞心配置による半正多胞体の 3 次元投影図形が、全て作成可能となった。しかも、正 16 胞体系においては、胞心・線心・点心の 3 種類の配置で作成ができるものもある。

正 24 胞体系では、正 16 胞体系と重複するものを除き、green line を用いても作成することができないことが分かった。しかし、通常の blue line の $1/\sqrt{2}$ の長さの strut さえあれば、胞心および点中心配置によるものが作成可能である。さらに、これがあれば、正 16 胞体系の、線心および点中心配置によるものの残りも、全て作成することもできるようになる。

なお、現状でも、「(4次元空間での)稜線の長さが等しい」ということにこだわらなければ、*で挙げたものと同じ構成要素を持つ立体が作成できる。これは、3次元で言えば、ちょうど zometool の node の形 (菱形 12-20 面体と同じ構成だが、稜線の長さが一定ではない) のような存在である。また、blue の strut は、比較的加工が容易であるので、切り詰めて、 $1/\sqrt{2}$ の長さのものを作成してもよい。

Zometool では、node と red, yellow, blue line の基本キットに green line が追加され、正 8 角形を作成するために、blue の strut と長さが等しい blue-green の strut も用意された。さらに、blue line と green line には、通常の $1/2$ の長さの strut も追加されている。このように、必要なパーツがラインナップに加わり、進化してきた zometool であるからこそ、全ての半正多胞体を作成するために必要な strut が追加されることを期待したい。

4 補足 - blue line に追加 strut が必要な理由

例えば、正 16 胞体の点配置による、正 16 胞体系の (0,0,1,1) (下図左) では、下図右のような組み方が必要になる。このとき、blue strut(長) と、green strut は、長さが等しくなければならない。green strut に、blue-green のものを使うと長さを等しくできるが、すると、blue strut(短)の長さは、blue strut(長)の $1/\sqrt{2}$ となる。なお、blue と green を入れ替えても、green line では 3 直角を構成できないため、この図形を作成できない。

その他の*の半正多胞体でも、同様にして、blue line に、 $1:\sqrt{2}$ の系列が必要であることがわかる。

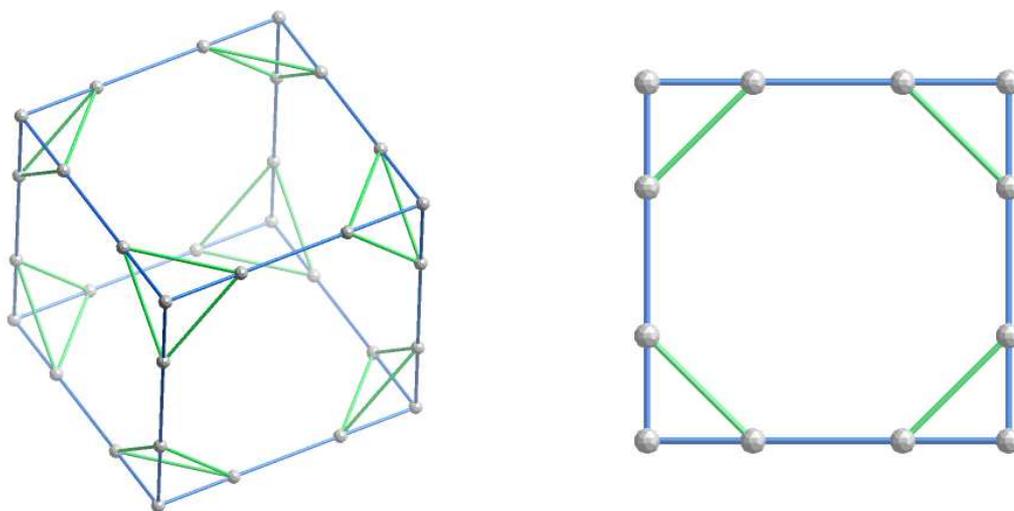


図 9: 正 16 胞体系の (0,0,1,1) (正 16 胞体の点配置)

参考文献

- [1] 宮崎興二・石原慶一: 4次元グラフィクス, 朝倉書店, 1989
- [2] 宮崎興二・石井源久・山口哲: 高次元図形サイエンス, 京都大学学術出版会, 2005

以上