ゾム入門
空間構造を理解するための新しいツール

ポール・ヒルデブラント
イメージミッション木鏡社訳

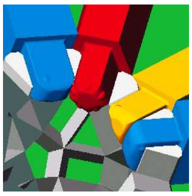
要約

本稿では、ゾムツールの基礎となる基本的数理と、教育における数学の数的読解力の重要性について論考する。

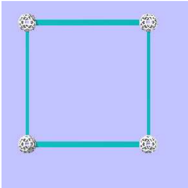
ゾムジオメトリー

ゾムは、空間構造を理解するための新しいツールです。言い換えると、ゾムは数学の体験ツールです。数学は「科学の女王」と呼ばれてきました。そして、ゾムの簡潔な美しさは、形に関する学会で発表されるあらゆる学問分野に適応されます。

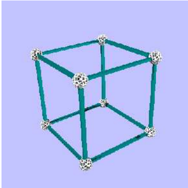
ゾムのボールとストラットは、それぞれ点と線を意味しており、簡潔かつ直観的に、空間に 2、3 と 5 という数の関連性を具体化するように設計されています。ストラットの形、空間のベクトル、ストラットの長さとそれが表す数字には関連性があります。



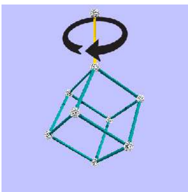
形－それぞれのストラットは、数字を意味します。青いストラットが黄金長方形の断面となることに注目してください。長い辺と短い辺とは黄金分割されています。すなわち、短い辺の長さが 1 であるならば、長い辺はおよそ 1.618 です。長方形には 2 つの短い辺と 2 つの長い辺があり、2 方向に 2 倍の対称性を持ちます。この長方形に関するすべてが数字の 2 と関連があるようです。



青いストラットが数字の 2 を表わすとすれば、ゾムの青いストラットのみでは正方形しか作れません：正方形は、2x2 の辺、2x2 の角と 2x2 の軸に沿って 2 倍の対称性を持ちます。正方形に関するあらゆる事が数字の 2 に関連があるようです。立方体はどうでしょう？



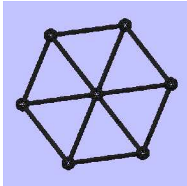
ベクトル−立方体は正方形から作られるため、青いストラットで立方体を造ることは、論理的なことでしょう。しかし、立方体は 2x3 の面、2^3の角と 2x2x3 の辺を持ちます。そして、3+2x2+2x3=13 の対称軸を持ちます。立方体はゾムの数字の 2（青いストラット）で造られているにもかかわらず、数字の 3 が存在し続けます。[1]



それは、黄色い（3 倍の）線を立方体で発見できることを意味します。3 つの正方形が結合される角に当然表れます。そこで、黄色のストラットを軸にして、立方体を 3 回回転させると、最初の位置に戻ることに注目してください。言い換えると、黄色い線は立方体の 3 倍の回転対称軸となります。

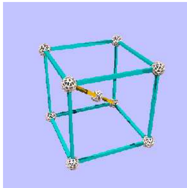
[1] 我々は子どもの頃から、幼稚園のブロック等の基本的なユニットである立方体に既に接している為、ほとんどの人にとって、立方体に数字の 3 を「見る」ことは難しいでしょう。ブロックは、通常、重力に従います。もし 1 つの角で簡単にそれらの釣合いをとることができれば、立方体の 3 倍の性質は明らかとなるでしょう。

それを確認するもう一つの方法は、影を投影することです。数字の 3 の（黄色い）線を光に向け、影を光に対して垂直の面に投影すると、六角形が映ります。言い換えると、数字の 6 の 2 次元バージョンまたは 2 次元の 2x3 が表れます。6 つの角、6 つの辺、中心に向かって 6 つの輻(や)を持ちます。それは 6 つの正三角形から成ります。

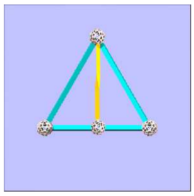


長さ－これはストラットの形、空間におけるそのベクトルとそれが表現する数字の関連性を示します。では、ストラットの長さはどうでしょう？

向かい合う、立方体の角の 1 つから相対する角まで 3 倍の対称線をたどることができます。ということは、ピタゴラスによると、長さは $1^2+ 1^2 + 1^2$の平方根つまり、ルート 3 を 2 で割ったもので、コサイン 30°です(a)。[2]黄色のストラットは、ゾムの青いストラットで造られる正三角形の高さであることが確認できます。黄色のストラットの長さは 3（b）に関連があることを示すもう一つの方法です。

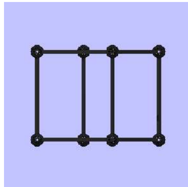


(a)

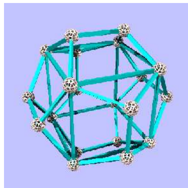


(b)

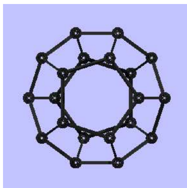
では、赤いストラットはどうでしょう？これらは、ゾムでの数字の 5 を表します。私たちは立方体が数字の 2 と 3 から「作られる」ことを確認しました。では、数字の 5 は立方体に発見できるでしょうか？数字の 3 の線と同様に、5 の線に沿って投影してみましょう。たとえどこに赤いストラットを挿入しても、常に同じ影になります。長い辺の長さは、1/（コサイン 18 °）または 1/コサイン（PI/2x5）の面白い長方形が出来ます。



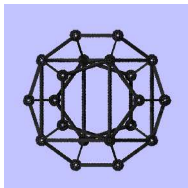
数字の 5 を立方体において見つけるもう一つの方法は、その上に屋根を作ることです。寄せ棟屋根を立方体面の 1 平面に作るために、短い青いストラットを使います。同じ屋根を立方体の全ての面に作ると、12 の正五角形でできている多面体である、12 面体が出来ます。そして、赤いストラットが中心から各々の五角形の面に対して垂直であるのを確認することができます。[3]



赤い線に沿って 12 面体の影を投影すると、外側の形は十角形になります。それは、2x5（すなわち青 x 赤）辺と 2x5 の頂点(a)を持ちます。2 つ目の図で、12 面体（b）の中に、１対 1/cos18°の割合で出来た変わった立方体の投影図を見ることができます。



(a)

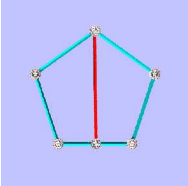


(b)

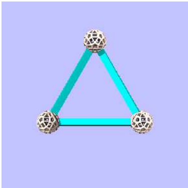
[2] ゾムのストラットの相対的な長さは、単位元　１（青）、コサイン 30°（黄色）、コサイン 18°（赤）とコサイン 45°（緑）です。私が青のストラットを 1 次元の数字の 2 と言うのは、それはその長さが 2 であるからでなく、それが空間において 2 倍の対称軸を表すからです。

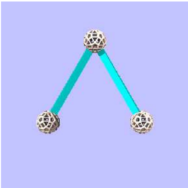
[3] 五角形が赤い平面にあります。赤の平面は赤の線と常に垂直となり、ゾムにおいて 5 倍の対称性があります。同様に青い平面は青の線と垂直となり、黄色い平面は黄色の線に対して垂直です。各々はその色の対応する対称性があります。

赤いストラットの長さは、正五角形の高さとみなされます。言い換えますと、コサイン 18°または Pi/2x5 のコサインです。
ということから、黄色のストラットが数字の 3 であり、青いストラットが 2 であるように、赤いストラットの交差部分、ベクトル、長さは数字の 5 に密接な関連があることがわかります。それは、ゾムを理解することの第 1 歩です：それは、2 次元、3 次元、さらなる高次元における数字の 2、3 と 5 の関連性を示すものです。

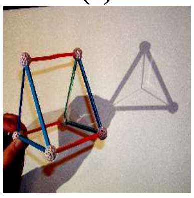


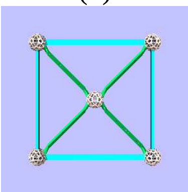
シャボン玉ーゾムとシャボン液を使って、最小面積の問題を説明することができます。たとえば、3 都市にケーブルを最短でつなぐにはどうしたらよいでしょうか？まず三角形(a)から考え始めるかもしれませんね。しかし、辺のうちの 1 つを取り除いても、3 箇所はまだ繋がれたままとなります（b）。


(a)

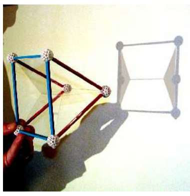

(b)

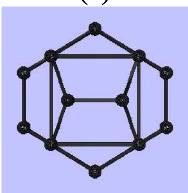
シャボン玉は、より効率的な解決方法を示します：それぞれのケーブルは三角形の中心に向かっています(a)[4]。正方形の角と相当する 4 つの都市で同じように、問題を解決する際も、多分同じアルゴリズムを使用するでしょう：この場合は、点を中央に置き、その点をつなぎます（b）。しかし、それは正解ではありません。

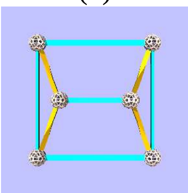

(a)


(b)

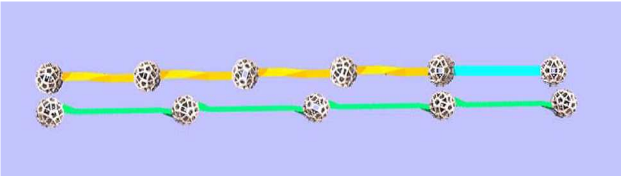
シャボン玉は、常に最も効率的な解決方法を示します(a)。この正確なグラフ（b）がその 2 倍の（または青の）対称軸(c)に沿って立方体-12 面体モデルの投影図の中に現れるのは、興味深いことです。


(a)

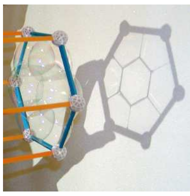

(b)

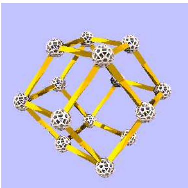

(c)

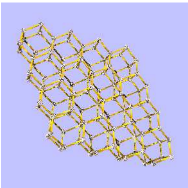
数学的にこれを確かめることができます。また、相当するゾムのストラットを並べて、どちらがより短いかを見ることによって、実際にそれを確認することができます。[5]



洗練された構造を持つ蜂の巣のように、シャボン玉はまた、最も密接して詰め込んでいく際の問題を図解することも出来ます(a)。最大の数の蜂を最小限の空間に詰め込むための理想的な形が、3 次元上の六角形のように空間を埋めていく（b）、菱形 12 面体（c）であります。


(a)


(b)

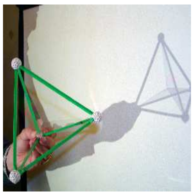
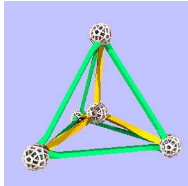

(c)

---

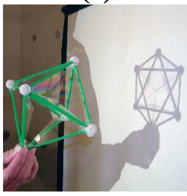
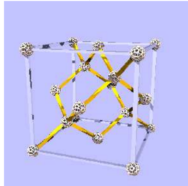
[4]三角柱で出来る 3 次元のシャボン玉は、2 次元上に解決策を示します。つまり、ここでは、青い(２倍)対称軸にそって影が投影されているのです。

[5]ゾムのハーフグリーンストラット（長さコサイン 45º）を使うと、直観的に一解決法に至りがちですが、それは間違いです。正方形の辺の長さが１なら、最初の解決法では 4x cos.45 = 2.82 のケーブルが必要となるのに対し、「シャボン玉」解決法は $4 \times \cos. 30^{o} + \tau^{-1} = 2.759$ で済みます。

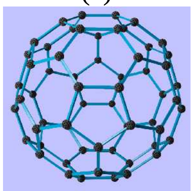
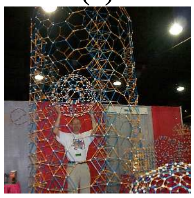
この形は、また、4 次元立方体の影の地殻ともみなされます。[6]　菱形 12 面体を詰め込むことは、ダイヤモンド構造に密接に関連があります。四面体(a)または三次元の数字の 3 の形のシャボン玉で、炭素原子を図解することができます。次に説明していきますが、このモデル（b）は 4 次元の数字の 3 の影とみなすことができます。


(a)

(b)

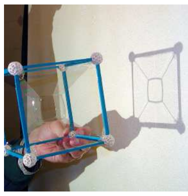
ダイヤモンドの炭素構造は、自然界で見つかるダイヤモンド構造と位相同形の結合する 5 つの八面体を確認でき、八面体のフレームで作られるシャボン玉で見ることができます。ダイヤモンド構造の単一セルは、（b）で示されます。[7]


(a)

(b)

ゾムを使ってグラファイトをモデル化することもできます。多くの新しい炭素構造、例えばバッキーボール(a)とナノチューブ（b）は 50 年代に日本の科学者によって理論立てられ、アメリカ人によって 80 年代に立証されました。ナノテクノロジーは、化学の宝庫です。医薬品のより効率的な伝達システムからハイブリッド車の超効率的なバッテリーまで、ありとあらゆる新しい適用方法が考えられる分野です。


(a)

(b)

4 次元の形をシャボン玉で図解することができます：上で述べたとおり、四面体のシャボン玉は、4 次元の三角形の影、またはそのものです。ゾムにおいて、黄色い線は 1 次元の数字の 3 であると考えます。一方、三角形は 2 次元の数字の 3、四面体は 3 次元の数字の 3 です。2 点は 1 次元の数字の 3 を定義し、3 本の線は 2 次元の数字の 3 を形づくり、4 つの三角形は三次元の数字の 3 を形づくり、5 つの四面体は 4 次元の数字の 3 をつくります。[8]



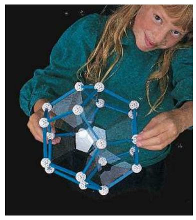
立方体のシャボン玉は、4 次元の正方形または超立方体の影を投影します。この場合、2 点は 1 次元の 4（線）を定義し、4 本の線は 2 次元の 4（正方形）を形づくり、6 つの正方形は三次元の 4（立方体）を形づくり、そして、8 つの立方体は 4 次元の 4（超立方体）を形づくります。3 次元立方体がいくつかの２次元の影を投影するように、4 次元立方体の影は上記にあげた蜂の巣の例と同様に有効なものです。[9]

[6]『影』とはここでは『投影図』を意味します。

[7]八面体のフレームは、いくつかの異なるシャボン玉を作ります。ダイヤモンド構造は、最も自然または、安定している形と言われていますが、それは、自然界でダイヤモンドを見つけるように、実際に「見る」ことは難しいでしょう。

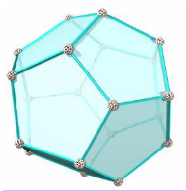
[8]この一連の定義は数学的に終始変わらないものです。これらの 4 面体の多胞体の恐らく最高 61 次元までゾムツールのモデルを造ることができるでしょう。

[9] シャボン玉の例は超立方体の第一のセルの透視投影です。一方、中央の菱形 12 面体は第一の点の平行投影です。

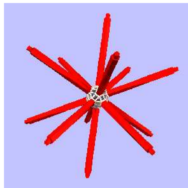


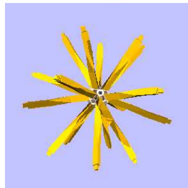
12 面体のシャボン玉は、4 次元の五角形（別名、高次元 12 面体または 120 胞体）の種です。

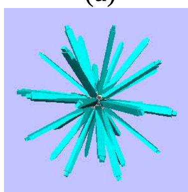
vZome デモンストレーション

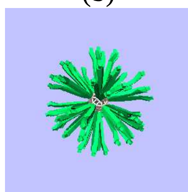


ゾムのパーツを使って、120 胞体の影を作製すると 2 時間位かかります。しかし、スコット・ボースマン氏により開発されたヴァーチャルゾムプログラム、vZome[10]を使用すれば数分で作製できます。12 面体が 12 個の五角形の辺が重なり合い形成されるように、120 胞体は、120 個の 12 面体が面で重なり合い形成されます。

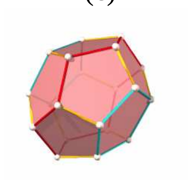

(a)


(b)

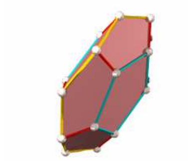

(c)


(d)

あなたがモデルに精通しているならば、対称操作を使用し段階的に作成するのが最も簡単な方法です。120 胞体の影は、20 面体の対称性、または以前に説明した 2 倍、3 倍、5 倍の対称性の組合せた性質があります。赤い（5 倍の）ストラットでこの操作をするならば、計 12 本の赤いストラットが必要となります。(5x12=60）また、黄色い(3 倍の)ストラットで行うなら、計 20 本のストラットが(20x3=60)、そしてこの操作により 30 本の(2 倍の)青いストラットを使います。(2x30=60)20 面体の対称性操作は、1 本の緑のストラットを 60 本に分割します。これは、緑のストラットは「ゾムの空間」において数字の 1 を表現するという考え方に通じます。（1x60=60）

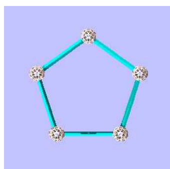

(a)

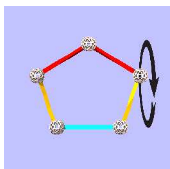

(b)


(c)


(d)

ゾムの 120 胞体の影は、「第一のセル」の影と呼ばれています。実践的には、これはモデルの中心が正 12 面体であることを意味します。事実、これはモデルの中の唯一均整のとれたセルです。その他は、全て投影によってゆがめられます。私はこれらを「太った赤いセル」（赤い（5 倍の）軸に沿って「押しつぶされた形」）、「黄色いセル」（黄色の（３倍の）軸に沿って「押しつぶされた形」）、「細い赤いセル」（これも、赤い（5 倍の）軸に沿って「押しつぶされた形」）と「平らな青いセル」（何度か確認した正 12 面体の２次元への投影です）と呼びます。このモデルでは、75 個のセルだけが見えています。残りのセルは、あなたが実際に見ているものと直線で並んでいます。

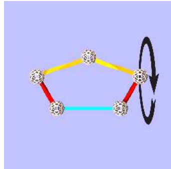

(a)


(b)

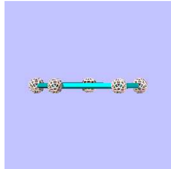
細胞が 4 次元から 3 次元へ投影される時、どのように「押しつぶされるか」を理解するために、3 次元から 2 次元への類似ケースを考えると分りやすいでしょう。五角形が 12 面体の「セル」であると仮定しましょう。五角形が赤い

[10]現在 vZome は www.vorthmann.org から　ｼﾞｬｳﾞｧ/ｳｪﾌﾞｽﾏｰﾄ形式でﾀﾞｳﾝﾛｰﾄﾞ可能

（5 倍の）対称軸にそっていれば、それは正五角形です。(a)しかし、それを(b)や(c)のように回転させ「つぶす」と、次第に、我々の視界では垂直となり、線分となります。（d）こうして、2 次元から 1 次元へつぶされます。ゾムの 120 胞体の投影は、このような 4 つの五角形のみから成ります。



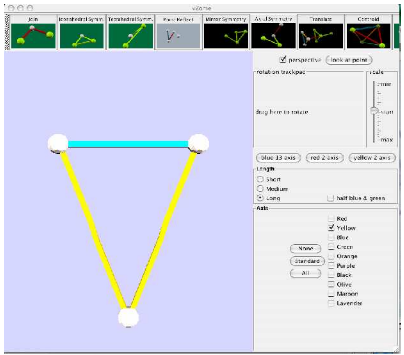
(c)



(d)

同様に、ゾム 120 胞体モデルの中心の正 12 面体は、我々の 3 次元世界と平行である超平面[11] に存在します。モデルの「表面」に向かって動くと、個々の種類のセルと接する超平面は、我々の世界に対してより大きな連続するハイパーアングル(超角度)に存在します。それは、我々が存在する 3 次元と「垂直」となる超平面に存在する、平らな青いセルに到着するまで続きます。

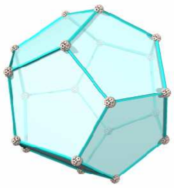
正 12 面体より始めます。3 つの五角形が 12 面体のそれぞれの頂点で結合しています。そして、モデルの中心よりセルの隣接する 2 つの頂点に向かって 2 本の黄色い（3 倍の）線を引きます。黄色い線は、それぞれ以前出てきた立方体の対角線と同じです。（立方体では、3 つの正方形がそれぞれの頂点で結合しています。[12]）頂点が重なることにより、120 胞体内の最初の正 12 面体セルの一辺が出来上がります。



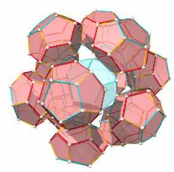
12 面体の一辺を見つけることや対称性によって、完成させること出来ます。(a)この方法で、徐々にストラットを組立てていき、120 胞体を構築することができます。均整の取れたセルを 12 個の太った赤いセルが囲みます。(b)

太った赤いセルを 20 個の黄色いセルで囲みます。(c)これらの黄色いセルを 12 個の細い赤いセルで囲みます。すると、これらのセルは、モデルの表面に青い平らなセルを形成します。(e)これらは、我々が以前に見た、青い(2 倍の）軸に沿って投影された 12 面体の影と同じである事に注目してください。

これは、実に美しいモデルです。しかし、我々の世界とどのように関連があるのでしょうか。古代のギリシア人は 12 面体を第 5 要素と呼び、天国の形を表現するために用いました。ヨハネス・ケプラーは一連の 5 つのプラトンの固体が既知の惑星の間の距離を測定すると信じていました。そして、その考えが誤りであった事を証明する為に、現代の宇宙論の基本原則を確立しました。そして、現在、電波望

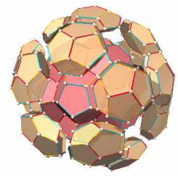


(a)



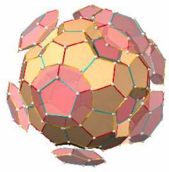
(b_1)

(b_2)



(c_1)

(c_2)



(d_1)

---

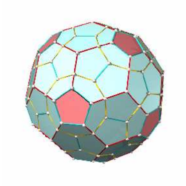
[11]「超平面」とは、3 次元空間の別の用語です。

[12] 12 面体は、5 つの立方体と定義するので、12 面体の全ての頂点は、 3 つの立方体の頂点に対応しています。あなたは理解できるしょう。

[13] Weeks, et al, Nature, 9 October, 2003

遠鏡のデータより、我々の世界は、有限であり、高次元 12 面体に類似した鏡の家のような形をしているのではないかと考えられています。[13]

(d$_2$)



(e)

vZome プロジェクトを使うことにより、数分で 1s と 0s の 120 胞体が構築できます。 .[14]

数的読解力と教育

もし、我々が 1s と 0s の仮想世界を構築出来るのなら、数字の 2, 3 と 5 で何が出来るのかを考えてみましょう。これらは、最初の 3 素数であり、とフィボナッチ数列の最初の「非デジタル」な 3 つの数字です。そして、当然ながらゾムの中で関連性を支配する黄金分割に通じるものです。実際、これらの数は、我々の自然や人工的な構築物の世界の基礎単位とみなされます。ナノテクノロジーや宇宙の理論上の形等の例に加えて、自然界における成長、バイオテクノロジー、準結晶の発見によって打ち立てられた材料科学における「コペルニクス革命」、原子の構成要素の構造、人工知能、新しい工業技術、建築物の構造等、多くの分野でこのような関連性を見つけることが出来ます。この言語への理解が進めば、我々は、現在の理解力を越えた更なる知識と富を得ることが出来るでしょう。私は、ゾムを「空間構造を理解するための新しい言語」と呼びました。このような理解力を、数的読解力と呼びかえることも出来るでしょう。読み書きの能力が重要視されてきた事と同じように、数的読解力は、21 世紀において重要な地位を占めるだろうと私は考えます。

識字能力 － 読み方を学ぶために、我々は 2 つの別の抽象概念（モノからそれを表現する音、そして、その音からその音を表現する抽象的な記号）までジャンプしなければなりません。また、記号を統合する為、例外も多い複雑な文法一式を学びます。こんなに複雑なことを、牛乳一杯をコップに注げるようになる前に、覚えなければならないのです。つい近年まで、読むという事は特権エリート階級だけに重んじられた能力であった事も不思議ではありません。しかし、現在では、生きる為に必要な技術となりました。

識字能力は、何処に住む人にとっても、生活水準を上げる為に最も重要な要因の１つだと言えるでしょう。また、子供たちにとっても、将来を決定づける大切な要因であると言えるでしょう。

我々は、物語が好きなので、誰でも自然と識字能力が身に付く傾向にあります。子供達には、ことばが話せるようになる前から、お語を聞かせ、読み書きの基本を学習する前に、ゆっくりとお話し好きに育てます。これは、大仕事ですが、生来の物語大好きの状態と、識字能力の技術的発達の間に橋を架けることに成功すれば、子供達のその後の人生を物質的にも精神的にも豊かにするような魔法が起こります。

数的読解力 ― 数学に関しても、同じように、誰でも数的読解力を自然に習得できます。我々はパターンが好きです。例えば、鉄道線路を進むとき、あなたは数字の 2 を感じるでしょう。1-2、1-2 と。または、児童書の詩、『魚一匹、魚二匹、赤い魚、青い魚』もそうです。実際、我々の殆どが、この世に誕生するや、2 倍の反射対称性をもつ母親の顔を見ることで、数字の 2 と遭遇しました。リズムやバランスのような単純なものは、我々が数字のことを意識することさ

[14] プリンストン IAS プロジェクトにおいて、最初の電子デジタルコンピューター機能を研究した、私の父、T.W.ヒルデブラント博士は、数学者フォン・ノイマンが遠い未来、コンピュータの１つの使用方法として画像処理を予知していたと発表しています。

えなく数字を感じる基本的なものです。数字のセンス、または数的読解力への自然な敬愛と言えるでしょう。

しかし、学校に入学したとたんに、子供達の数字に対して感じている自然な親しみと、子供達に課せられる抽象的な数学との間に、わざわざ橋を架けようとする人がいるしょうか。

数学者、エンジニアや科学者は、十二分に数的読解力を評価し、また、自分たちの子供に直観的な数字のセンスを育もうとするかもしれません。特に才能がある一部の子供たちは彼らの生来の数字のセンスと黒板に書かれた抽象的符号を関係付けるために、自分で勉強するでしょう。しかし、殆どの子供たちは、数学を苦手な課題と考えるか、最悪な場合には、数学に対する不安を抱くようになります。

私の育った文化では、数的読解力はほとんど評価されません[15] 。アメリカ人に数的読解力とは、と尋ねれば、彼らはあなたを唖然として見つめるでしょう。その結果、数学に対する不安感は、代々にわたり、引き次がれていくことになります。数学を恐れて、嫌うように教えられた子供たちは成長し、やがて、学生達に数学に対する嫌悪感を与えかねない教師となります[16] 。

ゾムは、こういった隔たり埋める為の道具です。子供たちが、青、黄色、赤のストラットを手の中で取り扱うことにより、指先に数字の 2、3、5 の形を感じることが出来るでしょう。ゾムの共同創設者マーク・ペルティエ氏が言うように、「あらゆるボールに説明書はついているのです」しかし、家庭内で誰も楽器を演奏しなければ、ピアノのみで音楽の鑑賞能力を構築することは難しいように、ツールだけでは、数的読解力の文化を構築するのは難しいでしょう。豊かな収穫を実らせるためには、我々は、自分達の子供たちや、公立学校や施設で数的読解力を慎重に深めていく必要があるでしょう。

常に我々が見聞きする、この世界の全てが、数学です。 アインシュタインは、「想像力は、知識より重要である」と言っています。しかし、直感的な数字への想像力と抽象的な数学の「厳格な美しさ」の中に含まれる知識の 2 つを結びつけたとき、我々は、より良い世界を築くための、人類の精神世界の素晴らしい力に触れることになるでしょう。

[15]公の教育より芝生の手入れにお金を費やす我々の国では、何の不思議もなく起こりうることです。

[16]特に直観的な数字のセンスに恵まれているが、抽象的な数学との隔たりを埋めることの出来ない子供たちは、しばしばアーティストや音楽家になることがあります。